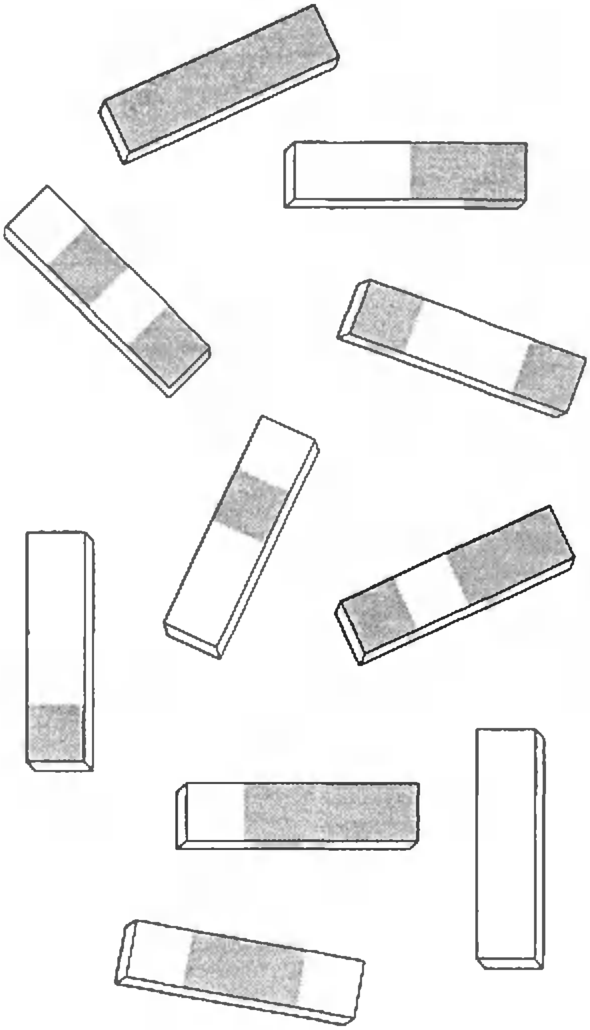
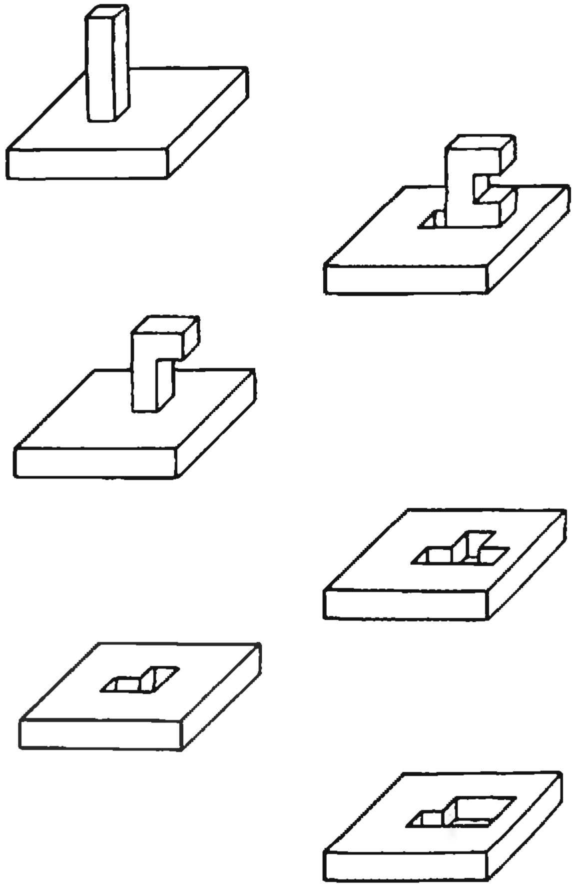
ISSN 0130-2221
СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ 1995 · №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК





«ДВА ПУТИ» И «СЛОЕНЫЙ КУБ»

Предлагаем вашему вниманию две новые головоломки для вашей коллекции. «Два пути» (автор В.Рыбинский из Тулы) состоит из 10 полосок. Восемь из них окрашены в два цвета, из двух оставшихся
...на — светлая, другая — темная. Необходимо сложить из этих полосок прямоугольник, прикладывая
...и друг к другу широкой стороной. В начале кладется светлая полоска, в конце — темная. Между ними
... разместить восемь оставшихся полосок так, чтобы с полоски на полоску можно было
...о одному и тому же цвету и дойти до крайней плоскости противоположного цвета. Когда вы
...ой задачей, попробуйте решить более сложную. Постройте дорожку с двумя непрерыв-
... — по светлой и темной частям полосок.

... изготовить в домашних условиях «Слоеный куб» (автор Л.Мочалов из Кировской
...й, из которых собирается куб 6×6×6.

...ешать или логически, или механически, прикладывая один элемент к другому
...правильное решение. Прежде чем выбрать, каким способом действовать,
...заимных расположений элементов в каждой головоломке.

КВАНТ

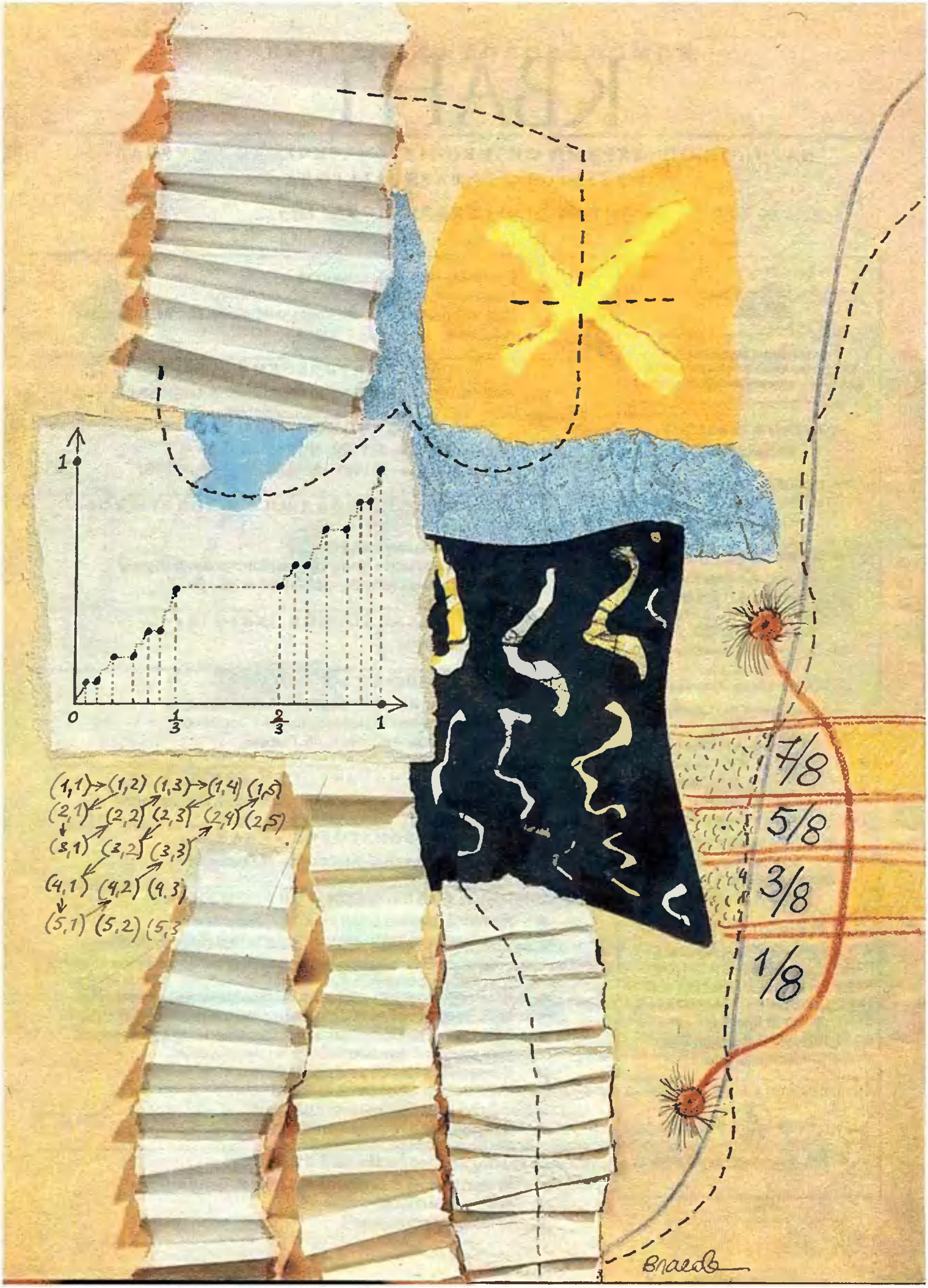
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ · 1995 · №5

В номере:

Учредители — Президиум РАН, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

Бюро Квантум


1
0
1/3
2/3
1
(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5)
(3,1) (3,2) (3,3)
(4,1) (4,2) (4,3)
(5,1) (5,2)
7/8
5/8
3/8
1/8

К 150-летию со дня рождения

Георг Кантор

В.ТИХОМИРОВ

> *Никто не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором*
>
> Д.Гильберт

Третьего марта этого года исполнилось 150 лет со дня рождения Георга Кантора. Местом рождения Кантора был Петербург. (По французской традиции национальная принадлежность человека определяется по месту его рождения. Поэтому во французских энциклопедиях можно прочитать, что Кантор был русским математиком.)

Наш знаменитый соотечественник, выдающийся тополог Павел Сергеевич Александров, сказал: «Думаю, что во второй половине XIX века не существовало математика, оказавшего большее влияние на развитие математической науки, чем создатель абстрактной теории множеств Георг Кантор». Не все согласятся с этим, хотя бы потому, что в те же годы творил такой величайший гений, как Анри Пуанкаре. Но совершенно невозможно отрицать огромное, несравненное воздействие творчества Кантора на все последующее развитие математики. Он обогатил нашу науку принципиальными концепциями, глубокими результатами, важнейшими идеями, содержательными теориями, плодотворными методами...

Идеи Кантора были восприняты сначала с большой настороженностью, потом многими – с восхищением, затем они были подвергнуты критике (иногда суровой), и отголоски этой критики слышны до сих пор. Однако один из величайших математиков всех времен – Давид Гильберт – писал так: «Я считаю, что она (теория множеств Кантора) представляет собой высочайшее проявление человеческого гения, а также одно из самых высоких достижений духовной деятельности человека». А через некоторое время, когда парадоксы теории множеств повергли многих (в частности, Пуанкаре) в сомнения относительно значимости этой теории, Гильберт произнес слова, избранные нами в качестве эпиграфа.

Так что же привнес в математику Георг Кантор? Начнем с перечисления. По сути дела Кантор выдвинул концепцию построения всей математики на базе теории множеств; он ввел основополагающие понятия теории множеств и топологии; заложил основы самой теории множеств; построил одну из конструкций вещественных чисел; изобрел диагональный метод; доказал несчетность континуума и равномощность пространств разного числа измерений; дал поразительное доказательство существования трансцендентных чисел; построил канторовское совершенное множество и канторовскую лестницу; доказал несуществование «высшей» мощности; доказал фундаментальную теорему единственности тригонометрического ряда; поставил проблему континуума.

Вклад Кантора оказался столь основополагающим и фундаментальным, что его основные положения можно изложить «первому встречному». (В своей речи на Парижском конгрессе математиков, где были сформулированы знаменитые математические проблемы, Гильберт сказал: «Математическую теорию можно считать совершенной только тогда, когда... ее можно изложить первому встречному». Все творчество Кантора имеет этот признак совершенства.)

И я постараюсь рассказать почти обо всем наиболее существенном из сделанного Кантором (причем с достаточной подробностью) здесь, на нескольких страницах журнала, рассчитанного на школьников. Вот выразительнейший пример того, что глубина математических результатов не всегда может быть измерена длиной текста и трудностью доказательств!

Переходим к обзору творчества Кантора. Начнем с главного.

Учение о множествах. Концепция строения математики

Кантору принадлежит заслуга привнесения в математику самого понятия «множества» (или «совокупности»). Это понятие относится к категории изначальных и неопределяемых.

Его можно лишь толковать и иллюстрировать на примерах.

«Под множеством, — писал Кантор ([1], с. 101), — я понимаю вообще всякое многое, мыслимое нами, как единое». «Например, — пишут в одной из своих книг П.С. Александров и А.Н. Колмогоров, — можно говорить о совокупности всех людей в данной комнате, о совокупности гусей, плавающих в пруду». Читатель легко продолжит этот список разнообразных множеств или совокупностей.

Андрею Николаевичу Колмогорову принадлежат такие слова: «В основе всей математики лежит чистая теория множеств», — и это высказывание отражает воззрение на строение математики, исповедовавшееся многими математиками его поколения. Такая идеология, по сути своей, — духовное детище Кантора. В отчетливой форме она была сформулирована Гильбертом и Вейлем, а затем закреплена в фундаментальном труде группы французских математиков, объединившихся под именем Бурбаки.

Что все это означает? Послушаем Бурбаки. В своем эссе «Архитектура математики» ([2], с. 247) он пишет: «Внутренняя эволюция математической науки... упрочила единство ее частей... Ее итогом явилось направление, которое обычно называют «аксиоматическим методом». (Некоторые крупнейшие математики отрицают вклад Бурбаки и считают аксиоматический метод тупиковым в истории математики. Но этот интересный сюжет — не для статьи, посвященной Георгу Кантору.)

Согласно воззрению Бурбаки математика распадается на все более и более сложно устроенные структуры, т.е. множества, оснащенные алгебраическими операциями, системами подмножеств и т.п. Вот примеры простейших структур.

На самых первых стадиях образования нас знакомят с понятием целого числа. Нас учат, что целые числа обладают следующим свойством:

1) $l + (m + n) = (l + m) + n$ *для любых целых чисел* l, m *и* n (сочетательный, или ассоциативный, закон).

Кроме того, мы узнаем, что целые числа можно вычитать, и это свойство выражается следующим правилом:

2) *для любых чисел* m *и* n *существует единственное число* x *такое, что* $n + x = m$ (отсюда, в частности следует, что существует число 0 такое, что $m + 0 = m$ для любого m).

Далее, для целых чисел справедливо и такое правило:

3) $m + n = n + m$ *для любых целых чисел* m *и* n (это свойство называют переместительным, или коммутативным, законом).

Любое множество X, оснащенное операцией +, удовлетворяющей аксиомам 1) — 2), образует одну из простейших математических структур, называемую *группой*. Если добавить третью аксиому, получится структура, называемая *коммутативной группой*. Таким образом, целые числа образуют коммутативную группу по сложению. Можно привести огромное количество и других примеров разнообразных групп.

Но целые числа можно не только складывать, но и умножать. При этом, как мы знаем, выполняется распределительный, или дистрибутивный, закон:

4) $l(m + n) = lm + ln$, $(m + n)l = ml + nl$ *для любых целых чисел* l, m *и* n.

Структура, в которой имеются две операции + и · (сложение и умножение) и при этом выполняются аксиомы 1) — 4), называется *кольцом*.

От целых чисел нам надо постепенно переходить к вещественным. На множестве целых чисел деление, вообще говоря, не определено, но вещественные числа можно и складывать, и вычитать, и перемножать, и делить.

Если добавить аксиомы коммутативности и ассоциативности умножения и аксиому однозначности деления, получится структура, называемая *полем*.

Наконец, у вещественных чисел имеется еще возможность сравнения; мы пишем $x \le y$, и при этом a) $x \le x$ для любого x, b) из $x \le y$, $y \le x$ следует, что $x = y$, c) из $x \le y$, $y \le z$ следует, что $x \le z$.

Множество с таким отношением $\le$ *называется упорядоченным.*

Мы привели примеры простейших структур (группа, кольцо, поле, упорядоченное множество). Но уже и этого почти достаточно, чтобы показать, как аксиоматически строится

Теория вещественных чисел

С точки зрения аксиоматического метода совокупность вещественных чисел — это *полное, упорядоченное поле*. Иначе говоря, множество, в котором имеются структуры поля и порядка (со всеми аксиомами, приведенными выше, и еще двумя аксиомами: *для любых* x, y *либо* $x \le y$, *либо* $y \le x$ *и если* $x > 0$, $y > 0$, *то* $x + y > 0$, $xy > 0$), дополненное еще одной очень важной (топологической) аксиомой полноты, которая выражает свойство «слитности» вещественной прямой, отсутствия в ней «дыр», которыми обладают, скажем, рациональные числа (например, число $\sqrt{2}$ попадет в «дыру» между рациональными числами).

Во времена Кантора описанные свойства сложения, умножения и порядка подразумевались, и собственно теория действительного числа состояла в том, что формулировалась та или иная аксиома полноты. Такие аксиомы были введены (или фактически введены) всеми крупнейшими математиками, закладывавшими строгие основания математического анализа — Коши, Больцано, Дедекиндом, Вейерштрассом и, наконец, Кантором. Вот как формулировал ее Кантор.

Аксиома полноты Кантора. *Любая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку.*

Теперь мы получили полный список аксиом вещественного числа. Можно доказать, что множество, аксиоматически определяемое с помощью этой системы аксиом, образует, в сущности, один-единственный объект (с точностью до изоморфизма). Это означает, что для двух объектов, удовлетворяющих всем аксиомам, можно найти такое взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет все алгебраические, порядковые и топологические свойства. Построенный выше объект называется совокупностью вещественных чисел или вещественной прямой и обозначается $\boldsymbol{R}$.

(Взаимно однозначное соответствие подобно соответствую $n \leftrightarrow 2n$ между всеми натуральными и четными натуральными числами, когда каждому элементу одного множества соответствует единственный элемент второго и наоборот.)

С необходимостью построить теорию вещественного числа Кантор столкнулся, желая применить построенную им теорию множеств к конкретной задаче алгебры и теории чисел: проблеме существования неалгебраических чисел (об этом речь пойдет чуть дальше).

Отметим еще, что Кантор определял вещественные числа и по-другому, как классы эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

(Последовательность r_n рациональных чисел называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что $|r_n - r_m| < \varepsilon$, если только n и m больше N. Две фундаментальные последовательности $\{r_n\}$ и $\{r'_n\}$ относятся к одному классу, если $\lim\limits_{n\to\infty}|r_n - r'_n| = 0$.)

Сам термин — фундаментальная последовательность — также принадлежит Кантору.

Переходим к следующей теме.

Основы теории множеств

Важнейшим понятием теории множеств является, безусловно, канторовское понятие мощности множества, обобщающего понятие числа элементов конечного множества. Назовем два множества эквивалентными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Мощность множества определяется как то общее, что есть у всех эквивалентных множеств. «Мощность множества, — писал Кантор, — есть то, что остается в нашем уме, когда мы отвлечемся от качественной природы его элементов и от их порядка». Наименьшей бесконечной мощностью является мощность натурального ряда. Ее Кантор обозначил $\aleph_0$ ($\aleph$ — алеф — первая буква древнееврейского алфавита).

Все множества мощности $\aleph_0$ называются счетными, их элементы можно пересчитать. Мощность множества действительных чисел, образующих отрезок $I = [0,1]$, называется мощностью континуума и обозначается иногда буквой **c** (от слова «continuum» — по-латыни это слово означает «непрерывное, сплошное»).

Имеют место следующие теоремы, принадлежащие Кантору и составляющие фундамент теории множеств.

Теорема 1. *Множество пар натуральных чисел счетно.*

Действительно, всякое натуральное число допускает единственное разложение в произведение степени двойки и нечетного числа (скажем, $40 = 2^3 \cdot 5$), и следовательно, формула $(m,n) \leftrightarrow 2^{m-1}(2n-1)$ задает взаимно однозначное соответствие между парами (m,n) (m,n — натуральные) и множеством натуральных чисел.

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1)\to & (1,2) & (1,3)\to & (1,4) & (1,5)\to & \ldots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \ldots \\
\downarrow & & & & & \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \ldots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \ldots \\
\downarrow & & & & & \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}$$

Эскиз этого рисунка изображен на мемориальной доске в Галле, посвященной Кантору

Другой способ пересчета указан на рисунке.

Следствие. *Счетное объединение счетных множеств счетно.*

Из рисунка видно, как нумеровать элементы счетного множества счетных множеств.

Теорема 2. *Континуум несчетен.*

Доказательство. Рассуждаем от противного: пусть континуум $I = [0,1]$ можно пересчитать. Перенумеруем точки отрезка $[0, 1]$, начиная с $0 = x_0$:

$$I = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}. \qquad (i)$$

Выразим каждую точку отрезка в виде бесконечной десятичной дроби, записывая (для однозначности) конечные десятичные дроби через девятку в периоде (скажем, $0{,}25 = 0{,}24(9) = 0{,}2499\ldots9\ldots$). Получаем

$$x_1 = 0, x_{11}x_{12}\ldots x_{1n}\ldots,$$

$$x_2 = 0, x_{21}x_{22}\ldots x_{2n}\ldots,$$

....

где x_{ij} — целые числа от нуля до девяти и нет чисел, у которых, начиная с какого-то момента, стоят одни нули. Рассмотрим десятичную дробь $\alpha = 0, y_1y_2\ldots y_n\ldots$, где $y_i \ne x_{ii}$, (например, $y_i = 1$, если $x_{ii} \ne 1$, и $y_i = 2$, если $x_{ii} = 1$). Этот процесс и получил название канторовского диагонального процесса.

Тогда в силу (i) получаем, что α имеет какой-то номер, скажем N, и тогда

$$\alpha = 0, y_1y_2\ldots y_N = 0, x_{1N}x_{2N}\ldots x_{NN}\ldots,$$

что невозможно, ибо по построению $y_N \ne x_{NN}$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Отметим, что диагональный процесс стал одним из важнейших инструментов в математических доказательствах. Например, доказательства двух замечательных теорем двадцатого века — Суслина о существовании нового класса множеств (A-множеств) и Гёделя о неполноте — основываются на диагональном процессе.

Трансцендентные и алгебраические числа

Переходим к важному следствию из теоремы 2.

Действительное число называется алгебраическим, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Таково, например, число $\sqrt{2}$ — корень уравнения $x^2 = 2$. *Неалгебраические числа называют трансцендентными.*

Теорема 3. *Трансцендентные числа существуют.*

Действительно, многочлены с целыми коэффициентами можно пересчитать, ибо их совокупность может быть представлена в виде объединения счетного множества счетных множеств (а именно, многочленов первой, второй, ..., n-й степени,... с целыми коэффициентами). Значит, в силу следствия из теоремы 1 они сами образуют счетное множество. Но у многочлена n-й степени не больше n корней, значит, всех алгебраических чисел также счетное множество. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ — совокупность всех алгебраических чисел. По теореме 2 они не исчерпывают совокупности всех вещественных чисел, но это значит, что существует трансцендентное число.

Кантор доказывал эту теорему чуть по-другому. Перенумеруем алгебраические числа. Возьмем первое число. Найдем отрезок, не содержащий его. Возьмем второе число. Внутри первого отрезка найдем меньший отрезок, не содержащий второго числа. И далее будем поступать аналогично. Получим последовательность отрезков, вложенных друг в друга, по длине стремящихся к нулю. В силу аксиомы Кантора общая точка пересечения всех отрезков есть трансцендентное число.

Точно таким же образом (без диагонального процесса) можно доказать и несчетность континуума.

Впервые «явно» построил трансцендентное число Лиувилль (в 1844 году). Он показал, что число $\sum\limits_{n=N} 10^{-n!}$ трансцендентно. В 1873 году Эрмит доказал трансцендентность числа e, а в 1882 году Линдеманн доказал трансцендентность числа π.

Многие математики ошибочно противопоставляли «конструктивное» решение Лиувилля и «чистую теорему существования» Кантора. Это противопоставление ложно. Метод Кантора совершенно конструктивен. Можно составить компьютерную программу, которая будет шаг за шагом вычислять «канторовское» трансцендентное число. (Подробнее см. об этом в [3]). Отметим еще, что метод Кантора, развитый Бэром, дал возможность строить огромное число объектов с интересными свойствами, подобные, скажем, непрерывным функциям, не имеющим производных.

Мощность квадрата

Следующая теорема оказалась в свое время сенсацией. Разве не очевидно, что в квадрате «больше» точек, чем в отрезке? И Кантору долгое время казалось, что мощность квадрата больше мощности отрезка. Но к своему величайшему изумлению он обнаружил, что это не так. Свое потрясение он выразил в послании к Дедекинду. В письме, написанном, разумеется, по-немецки, есть французское восклицание: «Je le vois, mais je ne crois pas!» (я вижу это, но не верю!).

Теорема 4. *Множество I точек отрезка эквивалентно множеству I^2 точек квадрата*

$$(I^2 = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}).$$

Доказательство. Разложим некоторое число $x \in I$ в десятичную дробь (как это было сделано в теореме 2 — с девятками в периоде). Назовем блоком в разложении этого числа из единичного отрезка всякую значащую цифру в десятичном разложении этого числа со всеми непосредственно ей предшествующими нулями. Например, число 0, 0032050007... разбивается на блоки {003}{2}{05}{0007}... Блоки будем обозначать символами b_i и c_i. Таким образом, числу $x = 0,x_1x_2...x_n...$ из отрезка I взаимно однозначно сопоставляется совокупность блоков $0,b_1b_2...b_n...$, а числу $y = 0,y_1y_2...y_n...$ из I сопоставляется совокупность блоков $0,c_1c_2...c_n...$ Паре (x,y) из I^2 взаимно однозначно сопоставляется совокупность блоков $0,b_1c_1b_2c_2...b_nc_n...$, а этой совокупности блоков (снятием фигурных скобок) взаимно однозначно ставится в соответствие число z из I. Так мы построили взаимно однозначное соответствие между точками квадрата (без левой и нижней стороны) и отрезка I без точки нуль, что доказывает теорему (ибо легко доказать, что отрезок без одной точки эквивалентен всему отрезку, а квадрат без двух сторон — самому квадрату).

Неограниченность мощностей

Теорема 5. *Мощность множества всех подмножеств любого множества больше, чем мощность самого множества.*

Прежде всего, надо объяснить, что значит: «мощность множества X меньше мощности множества Y». Это означает, что X эквивалентно некоторому подмножеству Y, но никакое подмножество X не эквивалентно Y. (Кантор очень хотел доказать такой результат: если X эквивалентно подмножеству Y, а Y эквивалентно подмножеству X, то X и Y эквивалентны. Он нашел доказательство этого факта, но в тот момент теорема была уже доказана Ф. Бернштейном. Ее называют теперь теоремой Ф. Бернштейна или теоремой Кантора-Бернштейна; так она называется, скажем, в Математической энциклопедии.)

Основой доказательства теоремы 5 служит следующая лемма.

Лемма. *Пусть S — некоторая совокупность подмножеств множества X, эквивалентная X. Тогда найдется подмножество A множества X, которое не принадлежит S.*

Доказательство. Пусть установлено взаимно однозначное соответствие $\xi \leftrightarrow B_\xi$ между точками x множества X и множествами из S. Соберем в одно множество те элементы, которые *не* принадлежат соответствующим им множествам. Обозначим это множество через A. Допустим, что $A \in S$. Тогда ему соответствует элемент ξ. Если ξ не принадлежит A, то он не принадлежит $B_\xi = A$ — противоречие. Если же $\xi \in A$, то ξ принадлежит $B_\xi = A$, что также невозможно по определению A. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Множество X эквивалентно подмножеству одноточечных подмножеств X. Допустим, что всё X эквивалентно множеству всех подмножеств X. Тогда множество всех подмножеств X удовлетворяет условию леммы. Согласно лемме существует подмножество X, не принадлежащее множеству всех подмножеств (!), что, разумеется, невозможно. Аналогично доказывается, что если $U \subset X$, то U не эквивалентно множеству подмножеств X. Противоречие доказывает теорему.

Кантор первым столкнулся с парадоксами теории множеств. Например, он понял, что понятие «множество всех множеств» приводит к противоречию. Действительно, совокупность всех подмножеств множества всех множеств (по теореме 5) имеет мощность большую, чем мощность множества всех множеств, а с другой стороны, это абсурд.

Нам осталось рассказать о понятиях, введенных Кантором, и о некоторых его конструкциях.

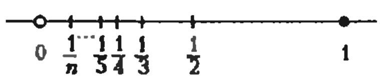
Общетопологические понятия

Кантор ввел важнейшие топологические понятия, заложив основания общей топологии. Он сформулировал эти понятия для прямой, но, пожалуй, проще их определять сразу в самом общем виде.

Пусть X — множество, и τ — некоторая система его подмножеств. Пара (X, τ) называется *топологическим пространством*, если пересечение конечного числа и объединение любого числа множеств из τ есть множество из τ. Множества из τ называются *открытыми*; множества из τ, содержащие некоторую точку, называются *окрестностью* этой точки. (Понятие топологического пространства выкристаллизовалось в начале нашего века и приобрело окончательные формы в трудах Хаусдорфа.)

Приведем теперь некоторые определения важнейших топологических понятий.

Точка x топологического пространства называется *предельной* для множества A, если в любой окрестности x имеется точка из A, отличная от x. Множество всех предельных точек множества A называется *производным*



Множество $A = \{1/n\}_{n \ge 1}$ имеет предельную точку 0, производное множество состоит только из нуля. $A \cup \{0\}$ замкнуто *множеством*. Множество, совпадающее со своим производным, называется *совершенным*. Множество, состоящее из точек A и его производного множества, называется *замыканием* A. Множество, замыкание которого в открытом множестве совпадает с этим множеством, называется *всюду плотным* в нем. Множество, замыкание которого не содержит никакого открытого множества, называется *нигде не плотным*.

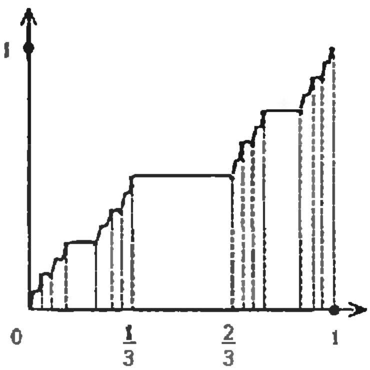
Любой математик усваивает эти понятия в самом начале своего математического образования, и может создаться иллюзия, что они существовали всегда. Нет, все они принадлежат одному человеку — Георгу Кантору.

Опишем теперь две замечательные канторовские конструкции.

Возьмем единичный отрезок I и выбросим из него срединный интервал с длиной, равной трети длины самого I (иначе говоря, интервал $(1/3, 2/3)$). Останутся два отрезка: $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$. С каждым из них проделаем ту же самую операцию. После этого останутся четыре отрезка, и с каждым из них опять-таки проделаем то же самое. И так далее. Что же останется? Оказывается, и много и мало. (Оставшееся множество будет совершенным и нигде не плотным.) С одной стороны, оно весьма «массивно» и имеет мощность континуума. А с другой стороны, оно очень «жиденькое»: его можно покрыть конечным числом интервалов сколь угодно малой длины. В таких случаях говорят, что мера построенного множества равна нулю. Это множество называется *канторовским совершенным множеством*.

Когда-то казалось, что такие множества — уроды, что в классическом анализе они возникнуть не могут. Но оказалось, что это не так, они возникли в самых что ни на есть классических задачах механики и при том у самого Пуанкаре! (А в наши дни многие убеждены, что «в жизни» только такие уроды и встречаются. Но это — особая тема, которой нам невозможно здесь коснуться.)

А теперь построим *канторову лестницу*. Над первым интервалом $(1/3, 2/3)$ положим $C(x)=1/2$, над двумя следующими интервалами второго ранга положим $C(x)$ равным $1/4$ и $3/4$, над интервалами третьего ранга, соответственно, $1/8$, $3/8$, $5/8$, $7/8$; поступая аналогично,



Канторовская лестница

мы построим функцию над всеми выкинутыми интервалами. А на самом канторовом совершенном множестве функция доопределится по непрерывности.

Функцию $C(x)$ называют канторовской лестницей. Она монотонна, у нее производная существует на всех выкинутых интервалах, суммарная длина которых равна единице. Таким образом, производная существует почти всюду и при этом равна нулю! (Эта функция не является интегралом от своей производной.)

Конечно, всем сказанным не исчерпывается наследие выдающегося ученого. (В частности, ему принадлежит теория трансфинитных чисел, одна из красивейших глав теории множеств.) Но думается, что значительнейшую долю канторовского вклада я все-таки описал.

Заключительные комментарии

Я хотел бы посоветовать читателю, если он этого еще не сделал, просмотреть — собрание сочинений Кантора по теории множеств [1]. Снова мне хочется процитировать П.С.Александрова. Он писал, что сочинения Кантора принадлежали к самым первым математическим работам, прочитанным им в ранней юности. Они произвели на него неизгладимое впечатление. Павел Сергеевич выражал надежду на то, что эти сочинения с увлечением будут изучаться «и помогут выявлению [среди читателей] молодых людей, имеющих интерес и способности к математике». Присоединяюсь к этим словам.

В [1] читатель найдет и очерк жизни Георга Кантора. Эта жизнь во многом была трагичной.

На самой заре своих исследований Кантор поставил перед собой проблему континуума, он жаждал доказать, что между мощностями $\aleph_0$ и c нет промежуточных мощностей. Несколько раз ему казалось, что он достиг цели, но потом он осознавал, что ошибался. Решение проблемы континуума (первой в списке гильбертовских проблем) Гёделем и Коэном — одно из значительнейших достижений нашего века.

Оказалось, что гипотезу континуума в рамках существующей аксиоматики теории множеств нельзя ни доказать, ни опровергнуть!

Исключительно напряженный период творческой жизни, непризнание многими математиками значимости сделанного им, неудача при попытках решить проблему континуума привели Кантора к тяжелой душевной депрессии. Первый приступ ее произошел в 1884 году. Кантор умер в нервной клинике в Галле 6 января 1918 года.

Кантор не дожил до того момента, когда его идеи стали общепризнанными. Это случилось в двадцатые годы нашего столетия.

Взлет математики, произошедший после первой мировой войны, развитие топологии, функционального анализа и вообще переосмысление сущности самой математики в трудах Гильберта, Вейля, Бурбаки и многих других — все это последствия того переворота, который был совершен Кантором.

Хотел бы подчеркнуть еще особую роль Кантора в рождении московской математической школы. Ее создатель — Николай Николаевич Лузин — являлся последователем французской школы теории функций, лидеры которой — Борель, Бэр и прежде всего Лебег — были прямыми продолжателями Кантора.

Так что многие отечественные математики должны чтить в Канторе своего пра-пра-пра-учителя.

Литература

1. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985.

2. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. — М.: ИЛ, 1963.

3. *Gray R.* Georg Cantor and Transcendental Numbers. — Amer. Math. Monthly, November 1994, p. 819–832.

Волоконно-оптическая связь

Ю.НОСОВ

> *«... японский город Ниигата, российский Находка и южнокорейский Пусан соединила волоконно-оптическая линия связи, проложенная по дну океана...»*
> (ИТАР ТАСС, 20.01.95)

ПОЖАЛУЙ, больше всего поразила и обрадовала будничность этого сообщения, вклиненного в пятиминутке «Маяка» между «курс доллара на вчерашних торгах...» и «прогноз погоды...». То, чем «цивилизованный мир» «переболел» лет 10 – 15 тому назад, кажется, начинает входить и в российскую практику.

Телефонные разговоры, телевизионные программы, компьютерная информация — все это, закодированное в последовательности ультракоротких лазерных вспышек, передается на большие расстояния по тончайшему кварцевому волокну. Ново, необычно, непривычно. Хотя чисто внешне волоконно-оптическая линия связи (сокращенно ВОЛС) ничем не отличается от традиционной проводной: кабель, приемный и передающий модули по его концам, ретрансляторы (регенераторы), встраиваемые в кабель через определенные расстояния для восстановления ослабленного сигнала, коммутаторы там, где линия разветвляется, разъемы, соединяющие все в единое целое (рис.1). Конечно «начинка» всех этих блоков — волокна, лазеры, фотодиоды, оптико-электронные переключатели — придают им новые качества, но что там внутри, разве увидишь?

...Еще в 1972 году в окрестностях английского города Бирмингема была проложена одна из первых волоконных линий связи длиной в несколько десятков километров, в 1976 году на восточном побережье США начала функционировать ВОЛС длиной 1000км, а в 1984 году оптическое волокно «нырнуло» под Ла-Манш. Вслед за этими, скорее демонстрационно-рекламными, проектами началась серьезная работа буквально во всех уголках мира. В 1988 – 89 годах была введена в эксплуатацию первая трансатлантическая проводная ВОЛС (ТАТ-8), соединившая США с Англией и ответвляющаяся на загадочные Бермудские острова. В 1990 году десять стран, в числе которых Италия, Турция, Греция, Израиль, осуществили подобный проект в Средиземноморском регионе. Транстихоокеанская волоконная линия связи протяженностью 8,3 тыс. км (!) протянулась от США к Японии, разветвленная оптическая сеть соединила Новую Зеландию, Австралию и Юго-Восточную Азию. В начале 90-х годов интерес к сверхдальним морским и сухопутным волоконным линиям как бы ослаб, по крайней мере в США и Западной Европе. Выявилось что-то порочное, компрометирующее? Отнюдь. Просто насыщенность магистральными линиями в этих регионах оказалась столь велика, что чуть ли не до каждого дома остается каких-нибудь 80 – 100 км. Акцент сместился в сферу коротких ВОЛС: от магистрали к АТС, от АТС — к зданию и внутри него. А на горизонте, до 2000 года, создание разветвленных волоконно-оптических локальных сетей высокоскоростного обмена данными между компьютерами. Ведь давно ясно, что будущее «информационное общество» это не просто «много компьютеров», это еще и обязательная увязка их в единую систему, включающую «источники» информации, «хранилища» информации (в виде баз данных и знаний) и, наконец, пользователей.

Вот так шаг за шагом, от дальних морских и наземных магистралей к внутригородским абонентским каналам связи и локальным вычислительным сетям утверждает волоконно-оптическая связь свой триумф.

А началось все намного раньше... Волоконная оптика как оригинальное научно-техническое направление зародилось в конце пятидесятых годов, когда научились изготавливать специальные стеклянные волокна — высокопрозрачные, тонкие, гибкие (хоть на палец наматывай) и достаточно прочные. Их создание явилось технологическим венцом чуть ли не вековых метаний оптиков в поисках световодов, пригодных для передачи света по криволинейным траекториям. Еще во второй половине прошлого века эта проблема встала во всей своей реальности: то надо было осветить несколько помещений одной электрической дугой (ее удобнее «разжечь» где-то в сторонке), то дать свет пороховым цехам, но так, чтобы не взлететь на воздух. Пробовали, и не без успеха, полые зеркальные трубки, сплошные стеклянные и кварцевые волокна и даже потоки жидкости (вспомним фонтанные струи, подсвечиваемые из сопла), но все это было не то. Наконец нашли: двухслойное стеклянное волокно — сердцевина из состава с одним показателем преломления, оболочка с другим — великолепно передает световой поток от входного торца к выходному, удерживая его внутри сердцевины независимо от того, вытянуто ли волокно в струнку или свернуто бухточкой. Научились изготавливать жгуты, плотно и аккуратно прижимая волокна друг к другу, а затем склеивая и заполировывая по торцам. Научились обеспечивать строгую геометрическую заданность укладки волокон, причем не обязательно одинаковую для разных торцов. Все это оказалось не очень простым делом — ведь порой в

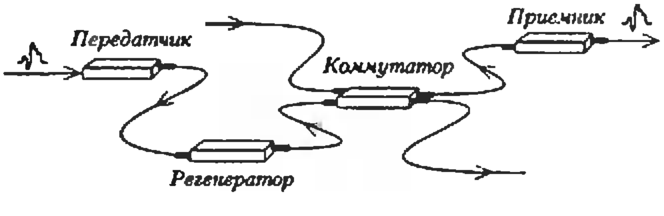


Рис. 1. Фрагмент волоконно-оптической системы связи

жгут объединялось до миллиарда (!) волокон.

Но зато появилось идеальное средство для подсветки в труднодоступных местах, для эндоскопии (сбылась мечта врача: «увидеть!»), для передачи изображений, для преобразования картин и световых полей (например, если сделать входной торец круглым, а выходной прямоугольным — что получится с передаваемым изображением?). Волоконная оптика кардинально преобразила многие разделы приборостроения, медицины, измерительной техники, ею заинтересовались специалисты по средствам отображения информации, логико-математическому анализу и даже ... «соответствующие органы» (для зашифровки шпионских посланий). Серьезные монографии конца 60-х — начала 70-х годов, посвященные волоконной оптике, запестрели метафорами и восклицаниями типа «новая эра в развитии оптики», «преодолен извечный гнет прямолинейности распространения света», «оптика вновь занимает королевское положение в физике» и т.д. и т.п. Революционизирующую роль волоконной оптики сравнивали с полупроводниками, которые в тот период уже шагнули от транзистора к бескрайним перспективам микроэлектроники.

Но в восторженных песнопениях тех лет практически не слышен был псалом «Оптическая связь». Что делать — длина типичного жгута не превышала метра, а при попытках увеличить его хотя бы до размера комнаты светопередача уменьшалась до десятых и сотых долей процента. И это еще не все, быть может, даже и не самое главное. Что мог использовать «оптический связист» в качестве источника световых вспышек? Лампочку накаливания? Как ни старайся, но ввести в жгут удается лишь ничтожную долю ее мощности, а инерционность процесса включения-выключения очень затрудняет кодирование световой информации. Однако — на дворе уже свежели новые ветры, скорее даже это была буря: пришла эпоха квантовой электроники.

В 1960 году были созданы первые лазеры, сначала рубиновые, потом газовые, а еще через пару лет и полупроводниковые. Полупроводниковые лазеры по мере их совершенствования (конечно, за этим сухим, безликим понятием — десятки физических открытий и технологических свершений, восторги и разочарования сотен исследователей и инженеров!) дали технике почти идеальный генератор оптических сигналов — миниатюрный, экономичный, с остронаправленным световым лучом однородного спектрального состава и способный включаться-выключаться миллионы раз в секунду.

Вот тогда-то, в 1966 году, и была высказана вслух уже витавшая в воздухе идея волоконно-оптической лазерной связи. Были сформулированы требования к прозрачности волокна, при которой такая связь могла бы стать реальной и конкурентоспособной. Правда, прозрачность надо было увеличивать в сотни раз, и технологи не видели для этого реальных путей, но... Слово было сказано, а это главное.

Надо заметить, что первое, на чем себя попробовали только что народившиеся лазеры, была как раз оптическая связь: на крыше одного из зданий на Ленинском проспекте в Москве установили лазер, на крыше другого — фотодиод, подсоединили к каждому из них соответствующие электронные устройства, и оптическая телефонная линия стала явью. Подобными экспериментами в значительно более широких масштабах «баловались» в США, Японии, Англии... В 1970 году один из выпусков Трудов американского института радиоинженеров, весьма авторитетного в мире электроники, был специально посвящен «десятилетию оптической связи». После анализа на двухстах страницах различных лазеров и фотоприемников, условий и особенностей распространения световых лучей в атмосфере, опыта эксплуатации первых экспериментальных лазерных линий связи следовало общее откровенно пессимистическое резюме: оптическая связь не состоялась. ... По иронии судьбы именно в том же 1970 году в июле появилось короткое сообщение американской стекольной фирмы «Corning Glass» об изготовлении кварцевого волокна со столь малой прозрачностью, что лазерный сигнал мог пробежать по нему более километра с небольшим ослаблением. Световод, удовлетворяющий требованиям, теоретически сформулированным в 1966 году, был создан! В тот же год, когда фактически была похоронена идея открытой световой связи через атмосферу, занялась заря волоконно-оптической лазерной связи. Вот уж поистине «Король умер, да здравствует король!».

И началось. Чуть ли не ежемесячно сообщалось о новых рекордных достижениях в области кварцевых волокон, буквально за 3 года научились изготавливать достаточно прозрачные волокна длиной до нескольких десятков километров. Параллельно этому совершенствовались и полупроводниковые лазеры, именно в те годы и именно благодаря потребностям волоконно-оптической связи. Лазерные диоды, как их стали называть, заняли заметное место в полупроводниковой промышленности.[1] Старт, данный в 1970 году, менее чем за два десятилетия привел ВОЛС к триумфу (но отнюдь не к финишу!) — сегодня паутина из кварцевых волосков, общей протяженностью в десятки миллионов километров, опутала буквально весь земной шар. (Хотя, впрочем — почему мы говорим о волосках? Сердцевина современного, так называемого одномодового, волокна соотносится с волоском настоящей смоленской блондинки, как карандаш со стволом березки. А локоны этих праправнучек древних кривичей самые шелковистые и тонкие в мире.)

Пора, однако, от исторических пассажей перейти к сути ВОЛС. Опыт свидетельствует, что каждый новый технический прорыв, как правило, базируется на «трех китах»: физика — материал — технология. Физика светопередачи по оптическому волокну, этому чуду XX века, основывается на законах, ставших известными человеку одними из первых. Из глубины веков от народов Месопотамии и Египта пришла аксиома о прямолинейности распространения световых лучей, древние греки использовали закон отражения и качественно правильно понимали эффект преломления. Фактически закон преломления света был впервые сформулирован голландским математиком Виллебрордом Снеллиусом (1620 г.), а окончательное математическое обобщение геометрическая оптика получила в знаменитой «Диоптрике» великого Рене Декарта (1637 г).

[1] *Начав с «обслуживания» волоконной связи, полупроводниковые лазеры так развились и усовершенствовались, что обеспечили, уже в 80-е годы, становление другого нового технического чуда — оптических запоминающих устройств. Сегодняшние лазерные плейеры и оптические компакт-диски, как ни странно, ведут свою родословную от ВОЛС. Такие переплетения в технике скорее закономерность, чем случай.*

Вспомним рисунок из учебника физики, иллюстрирующий закон преломления света. А теперь перевернем его так, что световой луч будет приходить из «стеклянного пространства» и падать на границу раздела стекло — воздух (рис.2). Если мысленно падающий луч начать «прижимать» к граничной плоскости, то в какой-то момент преломленного луча в воздухе вообще не окажется (для луча *2* на рисунке 2) — вся энергия светового потока остается в стекле. В этом состоит эффект полного внутреннего отражения. Отсутствие преломленного

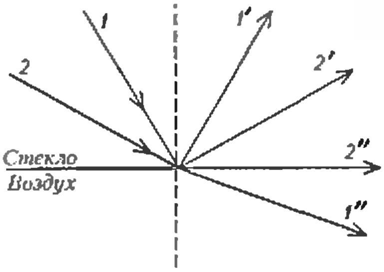


Рис.2. Иллюстрация эффекта полного отражения света при падении лучей на границу раздела стекло — воздух

луча означает, что взгляд, брошенный в направлении падающего луча, не может прорваться через границу раздела. В этом вы можете убедиться сами, погрузившись в глубь моря или реки. Если посмотришь прямо вверх, тебя ослепит солнце на небе, а если взглянешь под косым углом, то увидишь лишь внутреннюю поверхность водной глади — в безветренную погоду она почти идеально зеркальна. Полное внутреннее отражение возникает при распространении лучей света в среде с большим, чем за границей раздела, показателем преломления *n* (в наших примерах это стекло или вода, граничащие с воздухом).

В классическом двухслойном световоде обеспечивается условие $n_c > n_{об}$, и все достаточно косые лучи (на рисунке 3 лежащие внутри угла φ_0) претерпевают полное внутреннее отражение, причем при каждой их встрече с отражающей границей. И хотя траектория каждого конкретного луча представляет свою ломаную линию, световой поток в целом распространяется по сердцевине вдоль оси волокна. Угол φ_0 определяет входную угловую апертуру световода, лучи внутри него называют апертурными, а

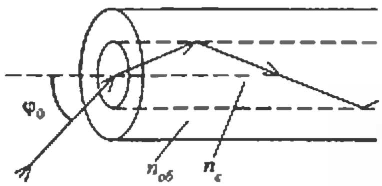


Рис.3. Распределение световых лучей в двухслойном волоконном световоде

менее косые — внеапертурными. Внеапертурные лучи, падая на границу сердцевина — оболочка, каждый раз делят свою энергию между отраженным и преломленным лучами; преломленные лучи выходят в оболочку, а затем и вообще из волокна и безвозвратно теряются. Поэтому внеапертурные лучи называют вытекающими, апертурные — направляемыми, канализируемыми.

Существо рассуждений по рисунку 3 не изменится, если волокно изогнуть, но не слишком резко: все геометрические соотношения для углов падения, отражения и преломления остаются практически неизменными, только чуть-чуть уменьшается апертурный угол φ_0. Световой поток послушно следует за всеми изгибами волокна, распространяясь по любой криволинейной траектории, но между каждыми последовательными актами отражения световой луч — это отрезок прямой, и закон прямолинейности распространения света, разумеется, не нарушается. Общая толщина волокна обычно близка к 0,1 мм, практически не искажая светопередачу, его можно наматывать на карандаш, хотя реальные условия применения столь сильных изгибов и не требуют.

Революционность технологического прорыва в создании сверхпрозрачных волокон связана с выбором кварца в качестве основного материала. Химически кварц это попросту диоксид кремния SiO_2, в сверхчистом виде его можно синтезировать методом парафазного осаждения, разработанным в 1970 году (рис.4). Через раскаленную кварцевую исходную трубу пропускают газовую смесь четыреххлористого кремния ($SiCl_4$) и кислорода, под воздействием высокой температуры (~1400 °С) в этой смеси протекает реакция с образованием кварца, который оседает на внутренней поверхности трубы. В процессе осаждения в поток добавляют газообразные реактивы, содержащие бор, фосфор, германий — эти присадки чуть-чуть увеличивают или уменьшают показатель преломления кварца. После получения слоев требуемых составов и толщин трубу нагревают еще больше до размягчения и «схлопывания». Полученную таким образом исходную

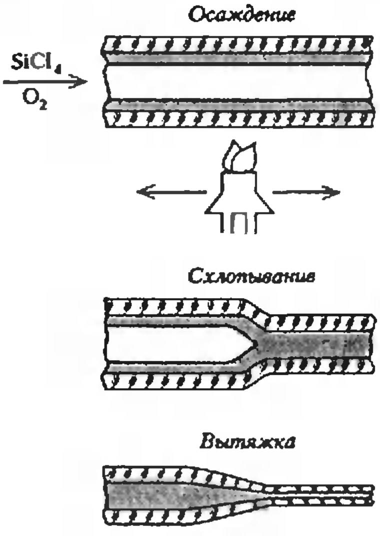


Рис.4. Основные этапы изготовления кварцевого двухслойного световода

заготовку затем перетягивают через серию последовательно сужающихся фильер. Как стало модным писать: «Волокно? Это очень просто». Но когда посмотришь на заводскую установку осаждения, оснащенную десятками датчиков, сигнализирующих в центральный компьютер о ничтожных отклонениях скоростей потока, составов, температуры от заданных, когда увидишь систему очистки газовых смесей, занимающую несколько комнат, то ощущение простоты что-то не возникает. А установка вытяжки волокна высотой с трехэтажный дом? А оставшиеся «за кадром» скрупулезнейшие исследования влияния примесей на изменение показателя преломления кварца (они нередко составляют лишь 0,001 к исходному *n* = 1,43)? А целая наука о причинах постепенного растрескивания волокон и о способах «залечивания» микротрещин, неизбежно образующихся на поверхности? И еще. Практически используется ведь не голенькое волокно, а волоконно-оптический кабель, который вне зависимости от нежнейшей начинки должен надежно противостоять тяжелейшим внешним воздействиям: резкие изменения температуры, влаги, тумана, сильные натяжения и скручивания, удары и многое другое. Многие первые полевые эксперименты использования ВОЛС оканчивались крахом не потому, что волокно отказало, а просто… кабель съедали грызуны — оболочка не должна быть «вкусной», это тоже одно из требований.

Продолжить в том же духе можно бы и еще, благо когда-то автору довелось знакомиться с описанными премудростями не только по книгам. Но «вперед лети, моя исторья».

Получить волокна с высокой прозрачностью — это для целей оптической связи условие «необходимое, но не достаточное». Ведь информация кодируется последовательностью импульсов, значит, надо иметь возможность передавать по волокну именно световые импульсы, и чем короче они будут, тем выше окажется пропускная способность канала связи. Но если вернуться к рисунку 3, то нетрудно видеть, что разные лучи из числа апертурных проходят на пути распространения к выходному торцу различные расстояния: достаточно сравнить луч, падающий вдоль оси, с лучом, падающим под углом φ_0. Это приводит к расплыванию импульса — из прямоугольного на входе он становится колоколообразным, размазанным на выходе. Соседние импульсы набегают друг на друга, возникают ошибки, сбои, а то и полная утрата информации.

К этой волноводной дисперсии добавляется еще и обычная «хроматическая» дисперсия — размытие импульса света, обусловленное зависимостью скорости света в кварце от длины волны. Все это в совокупности приводило к тому, что в первых волокнах 70-х годов при использовании тогдашних не слишком совершенных лазеров размытие импульса характеризовалось дисперсией ~ 40 нс/км. Это означает, что 10-километровая линия из такого волокна пригодна для одновременной передачи лишь нескольких телефонных разговоров — даже для того времени это было неприемлимо, а ведь надо было думать о будущем.

Началась увлекательная погоня за наносекундами, а потом и за пикосекундами — в который раз несовершенный человеческий мозг преодолел «теоретически непреодолимые» барьеры. Еще в 1973 году установили, что излучение с длиной волны $\lambda = 1{,}3 - 1{,}5$ мкм почти не подвергается дисперсии в кварце. И светопропускание в этой области спектра во много раз выше, чем при $\lambda = 0{,}85$ мкм, а именно на такой длине работали тогдашние лазеры. Поэтому встал вопрос о переходе в новую спектральную область, что фактически потребовало создания и новой элементной базы. Но теперь уже физики не блуждали в потемках, как при создании первых лазеров, а двигались по-инженерному расчетливо и планомерно. Был синтезирован новый класс полупроводниковых соединений, включающих четыре переменные компоненты: индий — галлий — мышьяк — фосфор. Варьируя состав, можно было «выходить на цель» в части требуемой длины волны излучения. Оказалось также, что взаимовлияние компонентов друг на друга позволяет получать структурно совершенные лазерные кристаллы, что всегда оставалось проблемой для их коротковолновых предшественников, изготавливаемых из тройного соединения: галлий — алюминий — мышьяк (заметим здесь, что и $\lambda = 0{,}85$ мкм и $\lambda \approx 1{,}3 - 1{,}5$ мкм относятся к инфракрасной невидимой части спектра, поэтому-то и используется обычно понятие «оптическая», а не «световая» связь).

Для борьбы с волноводной дисперсией пришлось вспомнить о световых волнах[2] и обратиться к строгому анализу уравнений Максвелла, описывающих их поведение. Оказалось, что если диаметр сердцевины волокна уменьшать, то число лучей, которые «имеют право» в нем распространяться, становится все меньшим и меньшим. Мы не оговорились — именно число лучей. Теория показывает, что для волокна справедлива та же ситуация, что и для СВЧ-резонаторов в части радиоволн, т.е. имеет место их квантование. «Разрешенные» волны (и соответствующие им световые лучи) называют модами, по сути дела каждая мода — это волна со своим углом падения, направлением поляризации, длиной волны.

Итак, уменьшая диаметр сердцевины, можно прийти к тому, что по волокну будет распространяться лишь одна мода; говоря на языке рисунка 3, при этом остается лишь осевой луч. Так начали развиваться одномодовые волокна с диаметром сердцевины ~ 5 мкм и с ничтожно малой волноводной дисперсией, именно они и составляют основу современной высокоскоростной волоконно-оптической связи.

Вот так шаг за шагом научились изготавливать сверхпрозрачные и лишенные дисперсии волокна и на их основе создавать линии оптической связи. Остается ответить лишь на один вопрос — а для чего это, собственно говоря, нужно? Зачем в передающем модуле электрический сигнал с помощью лазера преобразуется в световой, свет «вгоняется» в тончайшее волокно, распространяется по его сердцевине на десятки километров, на выходном конце воспринимается фотодиодом и в приемном электронном модуле вновь преобразуется в электрический сигнал, в точности подобный изначальному? Иными словами, какими достоинствами обладают волоконно-оптические линии связи в сравнении с традиционными проводными и радиорелейными?

Первое, важнейшее, достоинство ВОЛС — это ничтожно малое затухание сигнала в волокне: расстояние между ретрансляторами может свободно достигать 100 — 200 км, что во много раз превосходит тот же показатель у проводных линий. Но и это не предел — теоретические оценки показывают, что в спектральной области $\lambda \approx 2 - 2{,}5$ мкм можно замахнуться на передачу без ретранслятора на 1000, а то и на 10000 км! Конечно, для этого надо будет заменить и кварц, и лазеры, и фотодиоды — но разве это уже не приходилось проделывать в прошлом?

Второе достоинство ВОЛС — это их высочайшая пропускная способность: скорость передачи в десятки Гбит/с уже давно перестала быть рекордной, а типовые значения составляют сотни Мбит/с. Предполагается, что стандарт скорости передачи данных для локальных сетей 2000 года составит 1 Гбит/с — по такому каналу полный текст всех 30 томов Большой Советской Энциклопедии проскочит менее чем за 1 с. Но разумеется, и в этом вопросе ВОЛС имеют кое-что в запасе на будущее, причем не только «немного здесь» и «немного вот здесь», но и принципиально новое. Оказывается, если одновременно пропускать по волокну потоки световых импульсов с чуть-чуть отличающимися длинами волн, то они не смешиваются друг с другом и на приемном конце могут быть разделены. Благодаря это-

[2] *Представление о лучах света есть идеализация геометрической оптики: оно правомерно до тех пор, пока длина волны света ничтожно мала по сравнению с размерами рассматриваемых объектов.*

му можно увеличить в десятки, а то и в сотни раз пропускную способность уже проложенных коммуникаций. Но и это не все. Если вводить в волокно лазерные импульсы повышенной мощности, то образуются так называемые солитоны (одиночные волны), которые при распространении не только не расползаются, но могут даже сужаться. Скорость передачи информации может достигать 1 Тбит/с! Существенно, что все это не теоретические домыслы — многое уже подтверждено в лабораториях. Но волновая связь удивляет не только фактическими цифрами, но и новыми свойствами, которых нет вообще у проводных линий.

Вспомним, что, в отличие от электрона, фотон — переносчик информации в ВОЛС — не имеет электрического заряда, поэтому световой сигнал, распространяющийся по волокну, совершенно нечувствителен к внешним электромагнитным воздействиям. А воздействия эти уже давно перестали быть просто случайными помехами. К традиционным разрядам молний добавились бесчисленные радиопередатчики, электродвигатели, силовые ядерные установки. В больших городах, на крупных промышленных объектах нередко образуется «электронный смог», удушающее действие которого особенно чувствительно для слаботочной аппаратуры. Сколько авиакатастроф произошло по причине наведенных сбоев в компьютерах и линиях связи систем управления! А волоконным линиям не нужна тяжелая и дорогостоящая экранировка, они защищены от помех самим принципом своей работы.

Но традиционная радиоаппаратура не только подвержена действию электромагнитных волн, она и сама их излучает — что поделаешь, законы Ампера и Фарадея никто не отменил. На этой ниве расцвел радиошпионаж, сверхпроникающее действие которого уже перестало удивлять. И только ВОЛС, у которых скрытность передачи сообщений заложена в самой физике, позволяют гарантированно уберечься от несанкционированного доступа к информации. Автору знакомо довольно крупное отечественное предприятие, которое живет заказами на ВОЛС для Кремля и Лубянки, и неплохо живет!

Пойдем дальше. Волоконные кабели могут быть очень легкими и компактными, в десятки и даже сотни раз легче металлических. Разработан беспилотный самолет-разведчик, летающий вдоль фронта и передающий в штаб телевизионное изображение позиций противника по волокну, свободно сматывающемуся с барабана. Нередки случаи «привязки» метеорологических аэростатов к Земле с помощью оптических волокон — километр специального кабеля может иметь массу менее 1 кг, а его прочность на разрыв превышает 300 – 400 Н.

И наконец. Каждое новое техническое решение лишь в том случае может действительно «победить» традиционное, если оно обеспечивает выигрыш в стоимости. Вспомним, что основу металлических кабелей составляет медь и свинец — не только очень дорогие, но и довольно редкие в земной коре. Когда в 70-е годы прогнозировали развитие телефонии до 2000 года (тогда такие прогнозы были в моде), то получалось, что всю добытую из недр медь пришлось бы вновь закопать в землю в виде телефонных кабелей. Неплохой бы получился «круговорот меди» в природе! Волоконные кабели — по крайней мере в принципе — могут быть дешевы. Известно, что после того как преодолены первоначальные технологические и аппаратурные трудности и создано массовое производство, стоимость изделий определяется, главным образом, стоимостью исходного сырья и энергозатратами. Волокно изготавливается из кварца, а он из обычного песка, запасы которого несметны. Правда остается открытым вопрос о дороговизне лазеров и фотодиодов, но кажется и здесь пути удешевления нащупываются.

Согласитесь, что физики, технологи, конструкторы, электронщики потрудились не зря — уж очень впечатляет этот пышный букет разнообразных достоинств ВОЛС. Один из апологетов волоконной связи сопоставил ее по значимости с изобретением паровой машины, электрической лампочки, транзистора… И это так!

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

СКОЛЬКО НОГ У СТРАУСА?

Как вы думаете, может ли юмор быть логичным? На первый взгляд это «две вещи несовместные». Но если присмотреться повнимательней, оказывается, что найти совсем уж нелогичную, абсурдную шутку довольно трудно. Иногда анекдот даже слишком логичен, что и создает юмористический эффект. Вот вам образчик.

Учитель: Ивица, ты написала очень хорошую работу, но она точно такая же, как у Марка. Что я должен думать?

Ивица: Что работа Марка тоже очень хорошая.

Не правда ли, девочка ответила в лучших традициях аристотелевой логики? А смогли бы вы сами закончить этот анекдот, не зная ответа Ивицы? Я давала это задание школьникам и практически никто его не решил. Типичный ответ: «Это он у меня списал». А один участник олимпиады по логике ответил так: «Ивица покраснела и ничего не сказала». Видимо, слишком силен был здесь «фон», создаваемый знакомой ситуацией.

Ну а теперь, если вы хотите потренировать свое умение мыслить логически, найдите завершение нескольких анекдотов.

1. *Тетя Дороти*: Джонни, сколько существует заповедей?

Джонни (бойко): Десять!

Тетя Дороти: А что будет, если нарушишь одну из них?

Джонни (мечтательно): …

2. — Что с тобой, ты весь забинтован!

— Столкнулся с летающей тарелкой!

— Что ты говоришь?! Где же?

— …

3. Сын приносит из школы новую книжку.

— Это премия, — сказал он.

— Премия? За что, дорогой?

— Нас спросили, сколько ног у страуса, и я ответил «три».

— Но ведь у страуса только две ноги!

— Да, но остальные ученики …

4. — Джонни, больше не играй с Питером! Он очень плохой мальчик!

— А я хороший?

— Да, милый, ты очень хороший!

— Так значит …

5. — Где ты был в выходные?

— Ездил ловить карасей.

— И много поймал?

— Ни одного.

— Так откуда же ты знаешь, что …

6. — Бабушка, зачем ты красишь волосы?

— Чтобы быть молодой, никогда не умереть.

(Продолжение см. на с. 45)

Вечный двигатель, демоны и информация

М. АЛЬПЕРИН, А. ГЕРЕГА

В 1824 году в *Париже вышла в* свет небольшая книжка «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развить эту силу». Ее автор, молодой французский инженер Сади Карно (1796—1832), скончавшийся от холеры, так и не успел узнать, что сделал великое *открытие* — заложил основы термодинамики. Крупнейший физик второй половины нашего века Ричард Фейнман писал, что это один из немногих замечательных случаев, когда инженер заложил основы физической теории. Другой пример, приводимый Р.Фейнманом, — создание инженером-связистом Клодом Шенноном теории информации. Замечательно, что термодинамику и теорию информации объединяет не только история их рождения. Между ними существует глубокая взаимосвязь, обсуждение которой продолжается по сей день. Об этом мы и собираемся рассказать.

Первое и второе начала термодинамики

Первое начало (первый закон) термодинамики по сути есть закон сохранения энергии — теплота, подводимая к газу, расходуется на работу, совершаемую газом, и на изменение его внутренней энергии:

$$Q = A + \Delta U .$$

Есть несколько формулировок второго начала (второго закона) термодинамики. Одна из них, данная Р.Клаузиусом, говорит о том, что теплота не может самопроизвольно переходить от тела менее нагретого к более нагретому. (Более точно — невозможно передать теплоту от более холодного тела к более горячему, не изменив при этом состояние других тел. — *Прим. ред.*)

Наиболее лаконичные формулировки первого и второго законов термодинамики звучат на удивление единообразно.

1-й закон: Вечный двигатель первого рода (ВД 1) невозможен.

2-й закон: Вечный двигатель второго рода (ВД 2) невозможен.

Как вы помните, ВД 1 — это такой двигатель, который мог бы совершать работу неограниченно долгое время, не заимствуя энергию извне. ВД 2 — периодически действующий двигатель, который целиком превращал бы в работу теплоту, извлекаемую из единственного резервуара.

С практической точки зрения ВД 2 не хуже ВД 1, так как найти один источник с практически бесконечным запасом энергии можно — например, океан или атмосфера. В чем причина невозможности ВД 2? Она связана с молекулярно-кинетической теорией, и выяснение этой причины — новая «драма идей», как сказал когда-то по другому поводу Альберт Эйнштейн.

Интересно, что уже вскоре после того, как было сформулировано второе начало термодинамики, стали возникать какие-то смутные сомнения в справедливости этого закона. Как это могло случиться?

Броуновское движение

В 1827 году известный английский ботаник Роберт Броун — «бесспорный глава ботаников», по выражению знаменитого немецкого естествоиспытателя и географа А.Гумбольдта, — испытывал свой, недавно изобретенный, ахроматический объектив. Р.Броун увидел под микроскопом «пляшущих человечков» и показал их восемнадцатилетнему Чарльзу Дарвину.

Позже Ч.Дарвин писал, что, вероятно, это было движение протоплазмы в какой-то растительной клетке. Но великий биолог был неправ, и понадобились труды целого поколения физиков, чтобы понять природу броуновского «вечного движения».

Только в 60-х годах XIX века стали появляться робкие, часто умозрительные высказывания о связи движения броуновских частиц с тепловым движением молекул, а количественно описать броуновское движение удалось лишь в 1905 году. Сделал это А.Эйнштейн.

Какое это имеет отношение к работам С.Карно? Дело в том, что в 1888 году французский физик Луи Жорж Гюи доказал тепловую природу броуновского движения, а также сделал неожиданный вывод — броуновское движение несовместимо со вторым началом термодинамики. Действительно, броуновское движение — «вечно», и хотя это, конечно, не ВД 2, но, может быть, возможно его построить за счет броуновского движения. Рассуждение не очень убедительное, но орешек оказался твердым.

Демон Максвелла

Другое направление «удара» по второму началу термодинамики известно под названием «демона Максвелла».

Процитируем так называемое «Письмо Максвелла о демонах», написанное в 1868 году и адресованное шотландскому физику Петеру Тэту:

«1. Кто дал им имя? — У.Томсон.

2. Что они собой представляют? — Это очень маленькие, но весьма подвижные существа, которые не способны выполнять работу, но могут открывать и закрывать перегородку, движущуюся без трения и инерции.

3. Для чего они нужны? — Чтобы показать, что второе начало термодинамики имеет лишь статистический смысл.»

Далее Дж.Максвелл пишет: «Демон — это существо конечных размеров, которое может определять траектории и скорости всех молекул, просто наблюдая за ними».

Как работает демон? Пусть сосуд с газом разделен перегородкой с клапаном. Работой клапана управляет демон Максвелла. Он пропускает «быстрые» молекулы и задерживает «медленные». Вследствие такого разделения температура газа в правой и левой частях сосуда станет разной, что даст возможность построить машину Карно. Для бесконечно большого сосуда это и будет ВД 2. Причин, по которым построение ВД 2, использующего демон Максвелла, невозможно — несколько. Вот некоторые из них. Во-первых, демон сам является частью системы — броуновской частицей среди молекул газа. Поэтому, участвуя в броуновском движении и увлекая за собой клапан, он будет пропускать как «быстрые», так и «медленные» молекулы и, следовательно, разность температур между частями сосуда не возникает. Во-вторых, возникает проблема обнаружения демоном движущейся молекулы. Ее можно обнаружить, например, по молекулярным силам, с которыми она действует на демона. Но такие силы (называемые ван-дер-ваальсовыми) очень быстро убывают с расстоянием. Поэтому их обнаружение возможно лишь в непосредственной близости от клапана, управляемого демоном, а это приведет к тому, что открывать клапан без совершения работы будет уже невозможно. Существуют и другие причины.

Интересно, что, как мы уже говорили, само существование броуновского движения дало повод Л.Ж.Гюи усомниться в невозможности создания ВД 2, но именно оно отвергает возможность создания ВД 2 с помощью демона Максвелла.

Мысленный эксперимент Лео Сциларда

Через много лет, в 1929 году, произошло возвращение к вопросу о демоне Максвелла, когда в одном очень авторитетном немецком журнале появилась обстоятельная статья Лео Сциларда «Второе начало термодинамики и вмешательство мыслящего существа».

Здесь уместно сказать несколько слов о Лео Сциларде. Это был щедро одаренный человек. Он известен как специалист в области ядерной физики, термодинамики, теории ускорителей элементарных частиц. Его эксперименты по изучению деления ядер урана и обнаружению вторичных (образующихся в процессе реакции) нейтронов были решающими для американского атомного проекта. К тому же Л.Сцилард оказался выдающимся биофизиком — известны его работы по молекулярной биологии, генетике, иммунологии. Вместе с А.Эйнштейном он увлекался созданием различных технических приспособлений. Сотрудничая, они стали соавторами более десяти патентов, среди которых есть и патент на бесшумный холодильник.

Цель упомянутой статьи Сциларда — обсудить возможность нарушения второго начала термодинамики. Пусть есть замкнутый цилиндр объемом V, который может быть разделен подвижной заслонкой на две части с объемами V_1 и V_2 (в начале $V_1=V_2=V/2$), и пусть в этом цилиндре есть только одна молекула. Предположим, что эта молекула находится в V_1. Тогда будем передвигать заслонку как поршень, расширяя объем V_1 до V, поддерживая при этом постоянную температуру за счет единственного теплового резервуара. Для получения максимальной величины работы процесс расширения должен происходить бесконечно медленно, как и в идеальной машине Карно. Для этого среднее «давление» молекулы должно уравновешиваться каким-то давлением на поршень. Если затем заслонку выдвинуть из сосуда и привести в исходное положение, разделяющее цилиндр на две части, то такая система будет производить механическую работу. Но это возможно лишь в том случае, если заслонка-поршень движется в сторону той части цилиндра, которая не содержит молекулы. Следовательно, нужно придумать способ, позволяющий определять, где находится молекула. Можно придумать много вариантов такого эксперимента, например пропускать через прозрачные стенки цилиндра свет и смотреть, при прохождении через какую часть цилиндра он рассеялся. Нас же сейчас интересует то, что на любой такой эксперимент, позволяющий получить информацию о местонахождении частицы, требуется затратить энергию.

Сравним энергию, получаемую и расходуемую в одном цикле устройства Сциларда.

При изотермическом расширении газа, описываемом законом Бойля — Мариотта, работа, совершаемая газом, равна

$$A=\int_{V_1}^{V} p(V)dV.$$

Исходя из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV=\nu RT$, где ν — число молей газа, R — универсальная газовая постоянная, получим

$$A=\nu RT\int_{V_1}^{V}\frac{dV}{V}=\nu RT\ln\frac{V}{V_1}.$$

В случае если «газ» состоит из одной молекулы, то количество вещества, содержащегося в нем, равно $\nu=N_A^{-1}$, где N_A — постоянная Авогадро. Тогда, с учетом того, что $R=N_A k$ (k — постоянная Больцмана) и $V=2V_1$, окончательно получим

$$A=kT\ln 2.$$

Для расчета энергии, расходуемой на получение информации о месте частицы в цилиндре, необходимо обратиться к понятию энтропии.

Энтропия

Энтропия — один из параметров, характеризующих состояние газа. Понятие энтропии было введено в научный обиход уже упоминавшимся нами немецким физиком-теоретиком Рудольфом Клаузиусом. Он предложил считать, что если к газу подвести очень малую порцию тепла ΔQ так, чтобы его температура осталась постоянной, изменение энтропии ΔS будет равно $\Delta S=\Delta Q/T$. Мы не будем подробнее обсуждать такое определение энтропии. Тот, кто заинтересовался им, может обратиться, например, к книге Я.А.Смородинского «Температура» (М.: Наука, серия «Библиотечка Квант», вып.12). Нас же будет интересовать другое, статистическое, определение энтропии, данное Л.Больцманом: $S=k\ln W$, где W — вероятность состояния.

Для того чтобы прояснить смысл понятия «вероятность состояния», разделим мысленно объем, занимаемый этим газом, на N одинаковых ячеек. Макроскопическое состояние газа задается числом атомов, попавших в различные ячейки: n_1, n_2, ..., n_N. Можно рассчитать вероятность W такого состояния (она пропорциональна числу способов, которым его можно реализовать). Оказывается, W будет максимальной для состояния, когда $n_1=n_2=...=n_N$. В этом случае газ находится в максимально неупорядоченном состоянии, и его энтропия — максимальна. Таким образом, энтропия может служить мерой беспорядка в системе.

Такое определение энтропии физической системы близко к понятию информационной энтропии, которое в 1949 году предложил Клод Шеннон. Рассмотрение этого понятия выходит за рамки нашей статьи, и мы лишь заметим, что количество энергии, которое необходимо затратить на уменьшение информационной энтропии, т.е. на определение, в какой части сосуда находится молекула, в точности равно $A=kT\ln 2$. Таким образом, машина Сциларда выигрыша в работе не дает.

На этом, однако, история демона Максвелла не закончилась.

Несколько лет назад американский ученый К.Кэйвс предложил усовершенствованную машину Сциларда. В этой машине объединены несколько, например десять, цилиндров. К.Кэйвс предположил, что такое устройство с единой информационной системой может дать энергетический эффект. Действительно, для десяти камер получаемая механическая работа в десять раз больше. Энергия, необходимая для получения информации, может возрасти меньше чем в десять раз, например когда все молекулы находятся, скажем, в левых отсеках цилиндров, что также описывается одним битом информации, как и в случае одного цилиндра. (Один бит информации можно определить как минимальное количество информации, позволяющее однозначно ответить на вопрос, требующий ответа «да» или «нет».)

Однако вскоре стало ясно, что итоговый выигрыш в работе все равно в среднем недостижим. Это связано, как показали К.Кэйвс, В.Унру и В.Зурек, с тем, что в каждом цикле демону Максвелла нужны обновленные данные — в каком режиме работать: повторить наблюдения за молекулами или сразу начинать рабочий цикл, а на получение такой информации также надо затратить энергию.

Итак, второе начало термодинамики вновь выстояло, но теперь мы знаем о нем больше.

Как учатся математике во Франции

А.СОСИНСКИЙ

Франция — одна из ведущих математических держав, с давними математическими традициями и с процветающей ныне математической школой. Список великих французских математиков открывает в XV веке алгебраист (и дешифровщик тайнописи при дворе Генриха IV) Виет; в этом списке стоят такие известные вам имена как Паскаль, Декарт, Даламбер, Коши, Лагранж, Лаплас, Галуа, Пуанкаре, Борель, Лебег. Из четырех медалей Филдса[1], присужденных в 1994 г., три получили французы (Ж.Бургэн, Ж.-К.Йоккоз и Ж.-П.Лионс). Четвертую медаль получил Е.Зельманов, представитель советской математической школы, ныне работающий в США.

За этими успехами стоят многовековые традиции, централизованная и продуманная система обучения математике, очень не похожая на нашу. Об этих традициях и системе обучения — наш рассказ.

Традиции

Школьные и университетские традиции во Франции восходят к глубокому средневековью и связаны с просветительской ролью католической церкви (знаменитая парижская Сорбонна была основана в XIII веке епископом де Сорбон). Реорганизация начальной, средней и высшей школы была осуществлена Наполеоном[2] в начале XIX века, но свой современный вид («внеконфессиональная, обязательная, бесплатная») французская школа приобрела лишь в конце прошлого века в результате реформ великого просветителя Жюля Ферри (1832—1893) и самозабвенных усилий целого поколения передовой антиклерикальной интеллигенции, учителей, «ушедших в народ» не на словах, а на деле.

Со времен Наполеона в традиции школы в целом входит высокая степень централизации, демократизм, рационализм, объективность и крайняя формализация процесса обучения, достаточно хороший и ровный уровень подготовки учителей. Эти черты очень заметно сказываются и на преподавании математики. Демократизм и централизация — в единой программе по математике для всех школ и учащихся «метрополии и заморских территорий», едином выпускном экзамене по математике для всех учащихся. В один и тот же день, час и минуту во всех школах Франции преподаватель, проводящий экзамен, разбивает сургучную печать присланного из Парижа конверта и раздает выпускникам единый вариант письменного экзамена, утвержденный министерством национального просвещения. Несколько сот тысяч учащихся по всей метрополии одновременно пишут на специальном зашифрованном бланке свой ответ на один и тот же вопрос по теории и решают один и тот же цикл задач возрастающей сложности. Формализм и объективность — как в характере изложения самого курса математики (значительно более абстрактного и формализованного, чем в России), так и во взаимоотношениях между учителями и школьниками, в частности при проверке знаний (где все тоже очень регламентировано, притом достаточно четко). Демократизм и рационализм — во вседоступности и бесплатности не только школьного, но и вузовского образования, в единообразии подготовки учителей.

Обстановка на уроке, особенно в старших классах, как правило, достаточно жесткая, и сводится либо к опросу, либо к монологу учителя (во время которого большинство учеников ведет аккуратные записи), либо к письменной контрольной.[3]

Учитель

Преподаватель школы и вуза во Франции — это достаточно престижная профессия (в отличие, скажем, от США, где социальная оценка учителя очень проста: «неудачник»). Окончивший педвуз (École Normale) становится государственным чиновником, ему гарантирована работа (правда, не обязательно по месту жительства и с не слишком высоким окладом). Учитель, особенно в сельской местности и в малых городах, — весьма уважаемая фигура. Школьники называют его *Monsieur le professeur* (слово «профессор» относится в равной степени к учителям и к вузовским преподавателям), его (или ее), как правило, боятся и уважают. Эмоциональные, человеческие контакты между учениками и учителем практически исключены: соблюдается дистанция, и работа с учащимися, как правило, ведется строго в рамках учебного расписания и утвержденной министерством программы. Правда, в отличие от учителей российских государственных школ, учителя во Франции не получают централизованного поурочного расписания: порядок и хронологию изложения тем, входящих в программу данного учебного года, определяет учитель. Он же выбирает учебник.

Программы и учебники

Как было указано выше, учебные программы централизованно разрабатываются министерством и обязательны для всех государственных школ. Во Франции есть и частные школы, например католические, но в среднем их уровень ниже государственных (к примеру, в США — наоборот). Учебники, напротив, издаются частными книгоиздательствами, и их успех определяет рынок, т.е. в конечном итоге мнение учителей. Они очень привлекательно оформлены, красочны, с бросающимися в глаза выделениями основных формулировок и формул. Как правило, они выходят циклами для двух-трех, иногда четырех, классов, под общей редакцией одного известного педагога-математика. Довольно часто к ним прикладываются пособия для учителя. Стоят они сравнительно дорого: обу-

[1] *Медаль Филдса, наиболее престижная награда в области математических исследований, присуждается раз в 4 года Международным Союзом Математиков; как и Нобелевская премия (которой математиков не награждают), эта медаль — высшее признание научных заслуг.*

[2] *Великий полководец и политический деятель Бонапарт обладал незаурядными математическими способностями, отмеченными Лапласом при его поступлении в военное училище; в истории математики он известен как автор теоремы Наполеона.*

[3] *Автор, окончивший с отличием французскую среднюю школу, видимо здесь пишет исходя из личного опыта* (Прим.ред.)

чение в школе бесплатное, но экипировка школьника в начале учебного года — тяжелое финансовое бремя для малоимущих семей.

Французы, как и русские, очень любят всякие реорганизации. В последние 40 лет каждый новый министр просвещения считает своим долгом коренным образом изменить действующие программы. Наиболее радикальное изменение программ произошло в 60-е годы, в период всемирной «бурбакизации»[4], когда, по мнению многих специалистов, французская школа напрасно отказалась от того накопленного опыта преподавания математики, который привел к небывалому расцвету математической науки во Франции в сороковые и пятидесятые годы. Сейчас очередная реформа стремится к синтезу абстрактного подхода Бурбаки с интуицией и приложениями, к увеличению удельного веса вероятности и статистики в программах старших классов. Для сравнения отметим, что вероятность и статистика составляют почти половину объема курса математики в старших классах в Великобритании и почти полностью отсутствуют в курсе математики в России.

Отметим еще, что, после многих изменений, сейчас в двух старших классах выделены четыре основных потока, отличающиеся по количеству часов занятий по математике (от шести до двух в неделю) и содержанием курса; эти потоки условно можно назвать: математический, естественно-научный, инженерно-деловой и гуманитарный. Для примера приведем оглавление одного из учебников «Алгебра и геометрия» выпускного класса:

1. Перестановки
2. Исчисление вероятностей
3. Комплексные числа
4. Системы линейных уравнений
5. Проекции и координаты
6. Барицентрическое исчисление
7. Ориентированные углы на плоскости
8. Векторное произведение
9. Параметризация кривых на плоскости
10. Конические сечения
11. Изометрии плоскости
12. Преобразования плоскости
13. Элементарные преобразования пространства

[4] *Николай Бурбаки — коллективный псевдоним группы французских математиков, произведшей революцию в изложении высшей математики, основанную на догматическом построении всей этой науки на фундаменте теории множеств и теории алгебраических структур. Попытки перенести этот подход на изложение школьной математики, очень популярные в 60-е и 70-е годы во всем мире, не дали ожидаемого положительного результата, в частности во Франции, и были повсеместно заброшены.*

Конкурсы

Старейший конкурс во французской школе, *Concours général*, проводится в старших классах по всем основным предметам и по неизменным (с наполеоновских времен!) правилам. И здесь все формализовано и централизовано: в один и тот же день и час по всей Франции лучшие ученики всех классов одновременно выполняют одну и ту же работу. По математике эта работа состоит в решении цикла задач возрастающей трудности. В отличие от наших олимпиад, важное значение придается аккуратности оформления работы, решение задач скорей требует высокой техники, чем математической смекалки. Получение первой премии (как правило, ее получает только один конкурсант) — чрезвычайно престижно. К примеру, А.Н.Колмогоров рассказывал, как разволновался великий Ж.Адамар, вспоминая в 90-летнем возрасте о своем участии в Concours General, где он занял «лишь» второе место, хотя, как он взволнованно объяснял, он был объективно сильнее своего более удачливого конкурента, не достигшего затем больших высот в науке. Победители — обычно хорошо тренированные «школьные отличники» — не очень сильно выступают на привычных для нас олимпиадах, скажем на Международных математических. В целом рейтинг Франции на ММО намного ниже, чем ее ранг среди ведущих математических держав. Это не удивительно, ибо школьников учат в первую очередь теории и технике вычислений и рассуждений. Аналога наших кружков, матклассов, матшкол и летних школ во Франции нет. Нет и широкомасштабных олимпиад в нашем понимании этого слова. Существующие в некоторых учебных округах *региональные олимпиады*, проводимые по восточноевропейским традициям, проходят не всюду и не пользуются большим успехом.

В последние годы, однако, массовое распространение получила французская версия австралийского конкурса *Kangourou*, компьютерно проверяемого теста с множественными ответами. Достаточно сказать, что в 1993 году в нем участвовало более 500000 французских школьников![5]

Есть и другие оригинальные соревнования, например Парижский конкурс по математике и информатике.

Но самое главное для будущих математиков соревнование — это конкурс для поступления в одну из престижных *Grandes Écoles* (буквально: «больших школ»), обычно происходящий в начале третьего года университетского образования. Но об этом — ниже.

[5] *Конкурс «Кенгуру» проводится теперь и в России.* (Прим.ред.)

«Математика в джинсах»

В последние годы французские математики-исследователи, в основном молодые, ощущая оторванность исследовательской математики от школы и общества, придумали оригинальный новый жанр взаимодействия ученого и школы, направленный на пропаганду математической деятельности среди учащихся. В отличие от наших кружков, ориентированных на способных ребят, интересующихся математикой, программа *Математика в джинсах* имеет своей целью дать представление о математическом поиске не только будущим ученым и инженерам, но и тем, кто хочет стать литератором или бизнесменом. Организационно для этого нужен математик-исследователь, заинтересованная учительница и несколько любознательных ребят из ее класса. Общими усилиями, обычно с помощью компьютеров, они изучают в течение учебного года выходящую за рамки школьной программы проблему. Например, занимаясь компьютерным моделированием бильярдов, обнаруживают при этом закономерности теории хаоса, или рисуют на цветных экранах изумительные цветные картинки, встречающиеся в теории фракталов, или же большим компьютерным счетом экспериментально подтверждают непонятно откуда взявшиеся стохастические свойства распределения простых чисел. Это происходит во внеурочное время в несвойственной французской школе неформальной обстановке: в джинсах на занятиях могут быть не только школьники и школьницы, но даже работающий с ними университетский математик.

Вузы

Получив аттестат зрелости, называемый *baccalaur* (не путайте со степенью бакалавра, присуждаемой в англо-саксонских странах после 4-х лет учебы в университете), французский школьник имеет право обучаться в университете (бесплатно и без вступительных экзаменов). Но если он интересуется математикой, целью его первых двух лет обучения в университете будет скорей всего подготовка к конкурсу для поступления в École Normale Supérieure (ENS), желательно Парижской, на rue d'Ulm, 25. Раньше более престижной для математиков считалась École Polytechnique, но в наше время туда скорее идут будущие супер-инженеры, а не чистые ученые. Конкурсные испытания (разумеется, пентрализованные) состоят из нескольких математических экзаменов, письменных и устных, с максимальной суммой баллов около 600 очков, и служат одновременно для поступления во *все* педвузы Франции (ENS есть не только в Париже, а еще в Лионе, Бордо, Тулузе, Страсбурге и в других больших городах). Происходит это так. Первый (по сумме полученных на экзамене баллов) абитуриент выбирает любую ENS (почти всегда он/она выбирает ENS rue d'Ulm), второй тоже, а все последующие выбирают любую еще не укомплектованную более удачливыми конкурентами высшую школу.

На отделение математики и информатики ENS rue d'Ulm принимают всего 40–45 человек. В последние годы это означает, что для поступления в эту элитарную школу приходится выдержать конкурс от 3000 до 4000 человек на место (здесь нет опечатки: более трех тысяч человек на место!)

В случае неудачи на конкурсе (полного провала или получения места лишь в не очень хорошей, провинциальной ENS) студент может продолжить математическое образование в обычном университете, например в той же самой Сорбонне, окончить его и даже защитить диссертацию, но в этом случае его рейтинг как ученого будет несравненно ниже окончивших элитарную ENS.

Хотя изначально парижская ENS была задумана как педвуз, школьными учителями ее выпускники становятся очень редко. Это удел выпускников менее престижных Эколь Нормаль. Отметим, что окончание такого педвуза еще не дает права работать в старших классах. Чтобы это право получить, нужно успешно сдать конкурсный экзамен не *agrégation*. Этот экзамен – читатель уже догадался – уже более ста лет производится ежегодно в один и тот же день и час и расставляет конкурсантов по местам – от первого до *n*-тысячного. По порядку номеров, получившие звание agrégé выбирают любую из оставшихся вакансий в лицеях метрополии и заморских территорий. Первые 2–3 счастливчика попадают в Париж, последующие выбирают из оставшихся позиций. Впрочем, на agrégé по математике довольно большой спрос в промышленности, и многие получившие это звание так в школу и не попадают. Как, видимо, не попадет туда лауреат медали Филдса Йоккоз, занявший первое место на agrégation лет 10 тому назад (видимо, из чисто спортивного интереса) и установивший тем самым своеобразный рекорд: 1-е место на конкурсе в ENS rue d'Ulm, 1-е место на конкурсе в École Polytechnique (где он не стал учиться) и 1-е место на agrégation!

Элитарность, эгалитаризм, меритократия

Идея социального равенства, провозглашенного Великой французской революцией, очень четко осуществлена в действующей ныне во Франции начальной и средней школе. Школьник может учиться только в школе того учебного округа, того микрорайона, где он проживает. Какие-то школы и лицеи, разумеется, лучше, чем соседние, но нет ничего похожего на наши «элитарные» английские или математические школы, в которые ежегодно происходит «конкурс родителей», стремящихся любой ценой «запихнуть» свое чадо в престижное заведение. Есть и некоторые исключения, например парижский лицей Louis-le-Grand (Людовика Великого), в котором традиционно работают лучшие учителя математики Франции, а ученики иногда составляли половину «сборной Франции по математике» на ММО. Формально, однако, это лишь лицей некоторого микрорайона Парижа. Интересно, что некоторые родители специально снимают квартиры в этом микрорайоне, чтобы их любимый ребенок мог учиться в замечательном лицее!

Важно отметить, что не все учащиеся, окончившие среднюю школу, получают аттестат зрелости. В итоге экзамена на бакалавра, происходящего в июле (и пересдачи осенью), от 10 до 15 процентов школьников получают не аттестат, а справку об окончании школы, не дающую права учиться в университете. (Повторяю: любой учащийся, получивший аттестат, имеет право продолжить свое образование в университете, притом бесплатно.) Поэтому завал экзаменов на аттестат (например, избалованным отпрыском богатых родителей) часто является семейной трагедией.

Отсутствие элитарных средних школ и полная эгалитарность[6] и демократичность доступа к началу университетского образования вовсе не означает отсутствие во Франции «математической элиты». Напротив. Во Франции математики-исследователи четко делятся на две категории: те, кто учился в ENS rue d'Ulm, и все остальные. Выпускники этой престижной школы обвиняются в том, что они считают себя сливками французской математики, а всех других – математиками второго сорта. Характерно, что выпускники rue d'Ulm, в том числе получившие высочайшие академические звания, на обложках своих математических книг после фамилии пишут только «бывший ученик ENS rue d'Ulm»!

К сожалению, этот парижский снобизм, снобизм rue d'Ulm, действительно существует, а другие математики, в том числе известные во всем мире исследователи, так всю жизнь несут с собой комплекс неполноценности «не сумевших поступить».

Исключительность выпускников rue d'Ulm не следует преувеличивать. Мне приходилось работать с аспирантами этой элитарной школы – это хорошо обученные, работоспособные молодые люди, но они, пожалуй, слабее, чем скажем (более молодые) аспиранты Независимого московского университета, с которыми мне тоже посчастливилось общаться. Для французских аспирантов с rue d'Ulm, как впрочем и для всей французской математической школы, характерен более абстрактно-формальный и алгебраически-структурный подход к математике, чем у аспирантов из России или скажем из США. Большинство французских аспирантов предпочитают не решать задачи, а строить математические теории, больше интересуются обобщениями, чем приложениями.[7]

В академических кругах отмечают, что административную власть по математике во французской высшей школе и научных учреждениях «захватила парижская мафия с rue d'Ulm». Налицо полная победа меритократии[8]. При этом критики системы отмечают ее излишнюю жесткость, приводящую к разбиению математиков на два лагеря; эту ситуацию объясняют недостаточной гибкостью, отсутствием высших школ «средней престижности» (каковые имеются, скажем, в США или Великобритании).

Такова французская математическая пирамида – от скромного (по не лишенного чувства собственного достоинства) школьного учителя начальных классов до знающего себе цену (порой с преувеличением) математика-исследователя, выпускника Эколь Нормаль Сюперьер.

Отношение к математике французского школьника определяется четким и формализованным стилем ее преподавания на всех уровнях. Тех из них, кто интересуется этим предметом особо, ждет массовое, централизованное, жесткое соревнование за достижение вершины пирамиды.

[6] *От фр. égalité – равенство.* (Прим. ред)

[7] *И здесь дело не обходится без исключений. Недавний лауреат медали Филдса Бургэн знаменит тем, что больше всего любит решать задачи, буквально клянчит их у своих коллег.*

[8] *От лат. meritus – достойный и греч. krátos – власть.* (Прим. ред.)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1996 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 95» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1511» или «Ф1518». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1515—М1520 предлагались на Российской олимпиаде по математике, задачи М1511, М1512, М1514 — на Санкт-Петербургской олимпиаде по математике, задачи Ф1518—Ф1527 и М1513 — на олимпиаде Сороса.

Задачи М1511 — М1520, Ф1518 — Ф1527

М1511. На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Точка A — одна из двух точек пересечения этих окружностей. В каждой окружности проведен диаметр, параллельный касательной в точке A к другой окружности, причем эти диаметры не пересекаются. Докажите, что концы этих диаметров лежат на одной окружности.

С.Берлов

М1512. а) $f(x)$ — многочлен четной степени, отличный от 0. Докажите, что существует такое натуральное k, что многочлен $f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+k)$ не имеет вещественных корней. б) $f(x)$ — многочлен нечетной степени. Докажите, что существует такое натуральное k, что многочлен $f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+k)$ имеет ровно один вещественный корень.

С.Берлов, К.Кохась

М1513*. Докажите равенство

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}-4\sin\frac{\pi}{7}=\sqrt{7}.$$

Из задач олимпиады Сороса

М1514*. Прямоугольник разбит на доминошки (т.е. прямоугольники 1×2). Докажите, что его клетки можно раскрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.

Д.Карпов

М1515. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трехчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x)))=0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

С.Токарев

М1516. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму (если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершить перетаскивание в долг).
В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых они лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

И.Изместьев

М1517. Существует ли последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно один раз и при этом для любого $k = 1, 2, 3\ldots$ сумма первых k членов последовательности делится на k?

А.Шаповалов

М1518. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в отношении 2:1, считая от вершин, лежат на одной сфере.

Д.Терешин

М1519*. На плоскости отмечены две точки на расстоянии 1. Разрешается, измерив циркулем расстояние между двумя отмеченными точками, провести окружность с центром в любой отмеченной точке с измеренным радиусом. Линейкой разрешается провести прямую через любые две отмеченные точки. При этом отмечаются новые точки — точки пересечения построенных линий.
Пусть $Ц(n)$ — наименьшее число линий, проведение которых одним циркулем позволяет получить две отмеченные точки на расстоянии n, где n — натуральное число. $ЛЦ(n)$ — то же, но циркулем и линейкой. Докажите, что последовательность $Ц(n)/ЛЦ(n)$ не ограничена.

А.Белов

М1520*. Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, у которых старшие коэффициенты равны 1. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$ не меньше суммы квадратов свободных членов $P(x)$ и $Q(x)$.

М.Миньотт
(предложил А.Галочкин)

Ф1518. На гладкой горизонтальной плоскости стоит вертикальный столб радиусом R. При помощи длинной тонкой нити длиной L к столбу привязана маленькая шайба. Вначале шайба лежит на плоскости, и нить натянута. Шайбе придают толчком скорость v_0 перпендикулярно нити, и она начинает двигаться вокруг столба, наматывая на него нить. Трения нет. Нить привязана к столбу внизу — около поверхности, по которой скользит шайба (рис.1). Через какое время вся нить намотается на столб?

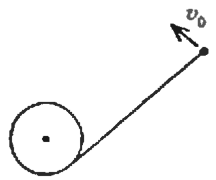


Рис.1

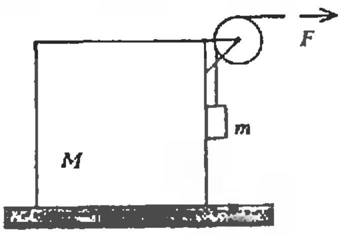


Рис.2

Ф1519. На шероховатом горизонтальном столе находится куб массой M, к которому прикреплен блок (рис.2). Через блок перекинута легкая нерастяжимая нить. К нити подвешен груз массой m — в состоянии покоя он касается стенки куба, а участок нити, привязанный к грузу, вертикален. За свободный конец нити тянут в горизонтальном направлении, прикладывая силу F. При какой величине этой силы ускорение куба по горизонтали составит a? Коэффициент трения между кубом и плоскостью, а также между стенкой куба и грузом равен μ.

А.Сашин

Ф1520. На гладком горизонтальном столе лежит гантелька, состоящая из двух маленьких шариков, массы которых M и $M/2$, скрепленных жестким невесомым стержнем. Еще один маленький шарик массой M движется по столу перпендикулярно гантельке и налетает на шарик M гантельки точно «в лоб». Происходит абсолютно упругий удар. Как движется гантелька после удара? Произойдет ли еще хотя бы один удар шарика и гантельки? Пусть теперь налетающий шарик имеет массу m. При каких соотношениях между m и M произойдет второй удар?

З.Рафаилов

Ф1521. Сосуд Дьюара содержит жидкий гелий-4. Из-за несовершенства теплоизоляции снаружи в дьюар «натекает» тепло — его мощность $N = 30$ мкВт. Для поддержания температуры гелия постоянной производится непрерывная откачка паров насосом, присоединенным к сосуду широкой трубкой длиной $l = 1$ м. Температура паров на выходе трубки (у входного отверстия насоса) практически комнатная. Сколько литров пара в минуту должен откачивать насос, чтобы поддерживать в сосуде температуру $T_1 = 1$ К? Во сколько раз нужно повысить производительность насоса, чтобы поддерживать температуру $T_2 = 0{,}5$ К? Давление насыщенных паров гелия при 1 К составляет $p_1 = 16$ Па, при 0,5 К — $p_2 = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ Па. Теплота испарения гелия $r = 92$ Дж/моль, диаметр молекулы гелия $d = 2 \cdot 10^{-10}$ м, масса 1 моля гелия $M = 4$ г/моль.

С.Джосюк

Ф1522. Вертикальный теплоизолированный сосуд закрыт тяжелым подвижным поршнем массой M. На поршень сверху помещена гиря массой m, под поршнем находится некоторое количество кислорода при температуре T_0. Гирю снимают и ожидают некоторое время — пока поршень полностью не остановится. После этого ее аккуратно ставят на поршень. Найдите высоту, на которой поршень окончательно остановится. Начальное положение равновесия поршня с гирей находится на высоте H над дном сосуда. Поршень движется без трения, теплоемкостью поршня и стенок пренебречь, наружное давление не учитывать.

А.Зильберман

Ф1523. Три маленьких шарика, массы которых m, M и m, заряжены одинаковыми зарядами Q (рис.3). Средний шарик, массой M, привязан к двум другим кусочками легкой нерастяжимой нити, длиной l каждый. Система лежит на гладком горизонтальном столе. Среднему

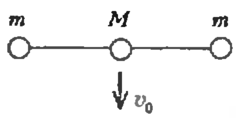


Рис.3

шарику толчком придают скорость v_0 в направлении, перпендикулярном к нити. Каким будет наименьшее расстояние между шариками m в процессе движения? Какой может быть скорость шарика M в те моменты, когда все шарики снова оказываются на одной прямой?

Р.Александров

Ф1524. Вольтамперная характеристика лампочки накаливания приведена на рисунке 4 (при напряжениях

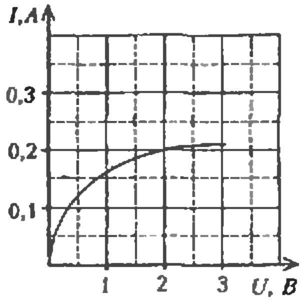


Рис.4

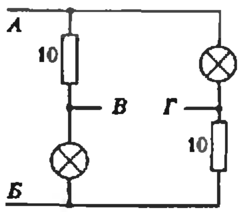


Рис.5

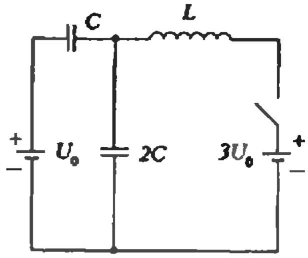


Рис.8

больше 3 В лампочка перегорает). Из двух лампочек и двух резисторов сопротивлением 10 Ом каждый собирают схему, показанную на рисунке 5. Между точками A и $Б$ подключают источник питания и начинают плавно увеличивать его напряжение. Между точками $В$ и $Г$ подключают вольтметр и фиксируют его показания. Нарисуйте график зависимости напряжения вольтметра от напряжения источника. При каком напряжении источника лампочки могут перегореть? Сопротивление вольтметра велико.

Ф1525. Вольтамперная характеристика диода в прямом направлении изображена на рисунке 6, в обратную сторону диод совершенно не проводит. Собрана схема из двух резисторов с сопротивлением по 500 Ом и четырех

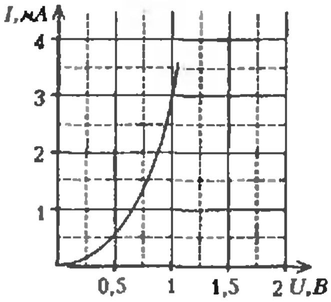


Рис.6

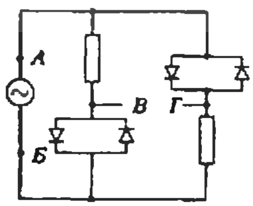


Рис.7

диодов (рис.7). К точкам A и $Б$ схемы подключают выход источника переменного (синусоидального) напряжения. Нарисуйте график зависимости от времени напряжения, измеренного между точками $В$ и $Г$. Рассмотрите три случая — амплитудные значения переменного напряжения источника равны 1 В, 2 В и 2,5 В.

А.Зильберман

Ф1526. К батарейке напряжением U_0 подключены последовательно соединенные конденсаторы емкостью C и $2C$ (до подключения конденсаторы не были заряжены). Параллельно конденсатору $2C$ в некоторый момент присоединяют цепочку из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и батарейки напряжением $3U_0$ (рис.8). Найдите максимальное значение тока через катушку и максимальное напряжение на конденсаторе $2C$. Сколько всего тепла выделится в системе с момента подключения катушки с батарейкой? «Минусовые» выводы батареек соединены между собой.

З.Рафаилов

Ф1527. Длинный узкий коридор освещается длинным рядом одинаковых ламп, висящих у потолка на одинаковых расстояниях друг от друга. В одной половине коридора лампы горят, в другой половине кто-то их вывинтил и унес (не горят). В той части коридора, где лампы горят, освещенность на полу изменяется от максимального значения I_0 точно под лампой до $I_1 = 0{,}96I_0$ посредине между лампами (освещенность измеряется на полу вдоль серединной оси, вдали от концов гирлянды ламп). Отражения света от стен и потолка нет. Освещенность точно под крайней лампой составляет $0{,}6I_0$. а) Найдите максимальную освещенность на полу в том случае, когда останется только одна горящая лампа. б) Какой станет максимальная освещенность на полу, если поставить горящие лампы вдвое чаще? Чему будет в этом случае равна освещенность в точках пола между горящими лампами? в) Какой стала бы максимальная освещенность при увеличении вдвое расстояния между лампами и полом?

О.Шпырко

Решения задач М1481—М1490, Ф1498—Ф1507

М1481. *В треугольнике ABC проведена биссектриса AK, D — точка пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине B с описанной окружностью. Докажите, что если $\angle A > \angle C$, то*

$$\sin A/\sin C - \sin\angle CDK/\sin\angle BDK = 1.$$

Пусть углы A, B, C треугольника равны 2α, 2β, 2γ соответственно. Биссектриса внутреннего угла B пересекает дугу AC описанной окружности в точке L, диаметрально противоположной D (рис.1). Положим $\angle CBD = \delta$, $\angle BCD = \varepsilon$. Используя теорему синусов (для ΔDBK и ΔCDK), теорему о биссектрисе треугольника

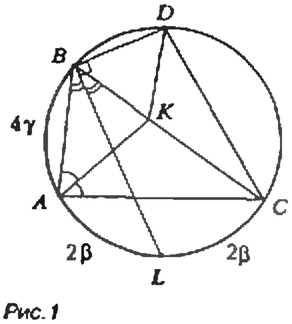


Рис.1

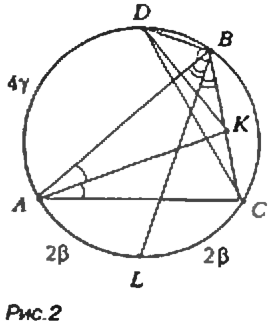


Рис.2

$(BK/KC = AB/AC = \sin 2\gamma/\sin 2\beta)$ и формулу

$$2\sin\varphi\cos\psi = \sin(\varphi+\psi) - \sin(\psi-\varphi),$$

получаем

$$\frac{\sin\angle CDK}{\sin\angle BDK} = \frac{KC\sin\varepsilon}{KB\sin\delta} = \frac{\sin 2\beta\cdot\sin\frac{\pi-4\gamma-2\beta}{2}}{\sin 2\gamma\cdot\sin\frac{\pi-2\beta}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\beta\cos\beta\cos(2\gamma+\beta)}{\sin 2\gamma\cos\beta} = \frac{\sin(2\beta+2\gamma)}{\sin 2\gamma} - 1 = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma} - 1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если $\angle A < \angle C$ (как на рисунке 2), то меняется лишь знак в формуле

$$\sin\varepsilon = \sin(2\gamma+\beta-\pi/2) = -\cos(2\gamma+\beta),$$

а $\sin\delta$ по-прежнему равен $\sin(\beta+\pi/2) = \cos\beta$, так что равенство в условии принимает вид

$$\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin\angle CDK}{\sin\angle BDK} = 1.$$

Я.Константиновский, О.Сулим

М1482. *Найдите все натуральные числа x такие, что сумма $1+2+\ldots+x$ равна числу, полученному приписыванием к x (в десятичной записи) слева цифры 1.*

Ответ: $x=5$. Поскольку $10^n + x = \frac{x(x+1)}{2}$, то $11x \ge \frac{x(x+1)}{2}$, $21 \ge x$. Отсюда следует, что либо $n=1$, либо $n=2$.

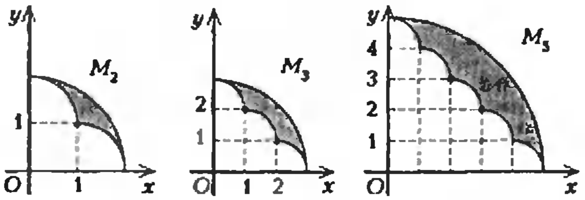
При $n=1$ получаем уравнение $x^2 - x - 20 = 0$, откуда $x=5$.
При $n=2$ получаем уравнение $x^2 - x - 200 = 0$, не имеющее рациональных корней.

В.Сендеров, Р.Федоров

М1483. *Найдите наименьшую возможную длину суммы семи единичных векторов с неотрицательными координатами на плоскости Oxy.*

Ответ: 5. Пусть $\bar{s}$ — сумма 6 любых векторов. Сумма $\bar{s}+\bar{a}$, где $\bar{a}$ — единичный вектор, будет иметь наименьшую длину, если $\bar{a}$ составляет с $\bar{s}$ наибольший возможный угол, т.е. направлен или по оси Ox, или по оси Oy. Таким образом, в наименьшую сумму должны входить векторы только этих двух направлений. Ясно, что квадрат длины суммы k векторов $(0;1)$ и $7-k$ векторов $(1;0)$ равен $k^2+(7-k)^2$ и принимает наименьшее значение 25 при $k=3$ и $k=4$.

Можно решить эту задачу, нарисовав последовательно множества M_2, M_3, ..., M_7 точек M, в которые может



попасть конец суммы $\overrightarrow{OM}$ двух, трех, ..., семи единичных векторов с неотрицательными координатами (см. рисунок). Ближайшие к O точки этих множеств выделены жирными точками.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

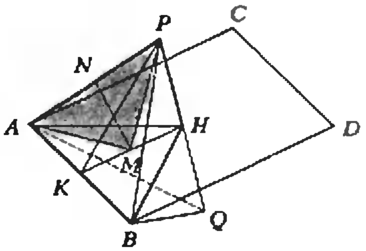
М1484. *Можно ли разбить пространство а) на одинаковые тетраэдры; б) на одинаковые равногранные тетраэдры; в) на одинаковые разногранные тетраэдры? (Тетраэдр называется разногранным, если у него все грани различны.)*

Все нужные примеры можно получить, предварительно разбив пространство тремя семействами плоскостей на одинаковые единичные кубики.

а) Пусть P — центр такого кубика, PH — перпендикуляр, опущенный на некоторую его грань $ABCD$. Очевидно, кубик можно разбить на $6\cdot 4 = 24$ одинаковых тетраэдра, равных $PABH$. Разбив таким образом каждый кубик, получим разбиение пространства на одинаковые тетраэдры.

б) Рассмотрим тетраэдр $ABHQ$, симметричный $ABHP$ относительно плоскости грани кубика $ABCD$, к которой он примыкает. Объединение этих двух тетраэдров — равногранный тетраэдр $ABPQ$ (все его грани — равнобедренные треугольники со сторонами 1, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/2$). Очевидно, все тетраэдры разбиения, построенного в пункте а), можно объединить в такие пары и тем самым разбить пространство на равногранные тетраэдры, равные $ABPQ$.

в) Опустим перпендикуляр HK на AB и рассмотрим тетраэдр $AKPH$ — половинку от $ABPH$; очевидно, кубик можно разбить на 48 тетраэдров, равных $AKPH$. Этот тетраэдр имеет две пары равных граней: он переходит в себя при повороте на 180° относительно прямой MN, где M и N — середины отрезков KH и AP (MN — высота равнобедренных треугольников AMP и KNH, см. рисунок). Но его можно разрезать по треугольнику AMP на



два равных (переходящих друг в друга при указанном повороте) тетраэдра $AMPH$ и $PMAK$, уже разногранных: две грани AHP и AHM тетраэдра $PMAK$ — прямоугольные треугольники с общим катетом AH, но разными вторыми катетами $KP > KM$; из двух тупоугольных треугольников AMP — равнобедренный, KMP — нет. Ясно, что на тетраэдры, равные $PMAK$, можно разбить все пространство.

Конечно, приведенные примеры — не единственно возможные. Интересны вопросы о существовании непериодических разбиений (связанные с недавно возникшим понятием «квазикристалла»), но эта тема заслуживает отдельного разговора.

Н.Васильев

М1485. *Докажите, что для всех наборов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $0 < x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, выражение*

$$x_2^k(x_1-x_3) + x_3^k(x_2-x_4) + \ldots + x_1^k(x_n-x_2)$$

неотрицательно при $k > 1$ и неположительно при $0 < k < 1$.

Докажем по индукции неравенство

$$(k-1)\big((x_1-x_3)x_2^k+(x_2-x_4)x_3^k+\ldots+(x_{n-1}-x_1)x_n^k+$$
$$+(x_n-x_2)x_1^k\big)\ge 0.$$

При $n=3$ получаем

$$(k-1)\big((x_1-x_3)x_2^k+(x_2-x_1)x_3^k+(x_3-x_2)x_1^k\big)\ge 0,$$

где $0<x_1\le x_2\le x_3$.
При $x_1=x_2$ или $x_2=x_3$ левая часть неравенства равна нулю. Пусть $x_1\le x_2\le x_3$, $x_1\ne x_3$. Положим $t=x_2$ и рассмотрим на отрезке $[x_1;x_3]$ функцию

$$f(t)=(k-1)\big((x_1-x_3)t^k+(t-x_1)x_3^k+(x_3-t)x_1^k\big).$$

Поскольку $f(x_1)=f(x_3)=0$, а $f'(t)$ убывает, неравенство $f(t)\ge 0$ справедливо при всех $t\in(x_1;x_3)$.
Действительно, пусть $f(x_0)<0$, где x_0 — некоторая точка интервала $(x_1;x_3)$. Тогда на интервале $(x_1;x_0)$ существует точка x_0' такая, что $f'(x_0')<0$. Аналогично на $(x_0;x_3)$ существует точка x_0'' такая, что $f'(x_0'')>0$.
Сделаем теперь индукционный переход.
Пусть натуральное число $n\ge 3$ и пусть $0<x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le x_{n+1}$. Требуется доказать неравенство

$$(k-1)\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-x_{i+2})x_{i+1}^k\ge 0$$

$(x_{n+2}=x_1,\ x_{n+3}=x_2)$.
По предположению индукции,

$$(k-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+2})x_{i+1}^k\ge 0$$

$(x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2)$.
Тем самым достаточно доказать неравенство

$$(k-1)\big((x_{n-1}-x_{n+1})x_n^k+(x_n-x_1)x_{n+1}^k+$$
$$+(x_{n+1}-x_2)x_1^k-(x_{n-1}-x_1)x_n^k-(x_n-x_2)x_1^k\big)\ge 0.$$

Перепишем его:

$$(k-1)\big((x_1-x_{n+1})x_n^k+(x_{n+1}-x_n)x_1^k+(x_n-x_1)x_{n+1}^k\big)\ge 0.$$

Осталось заметить, что это неравенство совпадает, с точностью до обозначений, с уже доказанным выше (для случая $n=3$).
Неравенство задачи доказано.

Л.Курляндчик, В.Сендеров

М1486. *Можно ли из чисел 1, 1/2, 1/3, ... выбрать последовательность а) из 5; б) из n; в) из бесконечного числа членов, в которой каждое число равно разности двух предшествующих?*

Для любого n можно построить нужную последовательность длиной n, взяв первые n чисел «ряда Фибоначчи»

$$1,2,3,5,\ldots,f_n \qquad (*)$$

(где $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$), переставив их в обратном порядке и разделив на общее наименьшее кратное N этих n чисел $(*)$: каждое f_k/N будет иметь вид $1/m$, где m целое, и

$$f_{k-1}/N=f_{k+1}/N-f_k/N.$$

Для $n=5$, например, НОК (1, 2, 3, 5, 8) = 120 и полученные пять чисел — это 1/15, 1/20, 1/40, 1/60, 1/120. Конечно, возможны и другие примеры.
Бесконечной последовательности a_n такого вида не существует, поскольку, с одной стороны, все a_n имеют вид m/N, где N — наименьшее общее кратное знаменателей у a_1 и a_2, m — натуральное число, а с другой стороны, последовательность знаменателей чисел a_n не ограничена, так что различных значений a_n может быть лишь конечное число.

Н.Васильев

М1487. *Пусть H — точка пересечения высот, O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравностороннего треугольника. Докажите, что из трех отрезков OH, IH, OI наибольший — OH.*

В случае неравнобедренного неостроугольного треугольника $\angle OIH>\frac{\pi}{2}$; в случае равнобедренного неостроугольного треугольника неравенство задачи очевидно.
Пусть A — произвольная вершина остроугольного треугольника. Легко показать, что биссектриса угла A лежит между AO и AH.
Пусть точки O, I, H лежат на одной прямой (нетрудно показать, что такое расположение имеет место лишь в случае равнобедренного треугольника). Так как I лежит между O и H, $I\ne O$, $I\ne H$, то неравенство задачи очевидно.
Пусть точки O, I, H не лежат на одной прямой. В этом случае $AOIH$, $BOIH$, $COIH$ — невырожденные четырехугольники, среди которых ровно один невыпуклый. (В задаче М1384 показано, что невыпуклый четырехугольник ровно один: отвечающий среднему по величине углу треугольника ABC.) Пусть, например, невыпуклым является четырехугольник $BOIH$. Имеем
$\angle OIH>\angle AIC>\frac{\pi}{2}$, откуда сразу следует неравенство задачи.
Замечание 1. Задача допускает также и алгебраическое решение.
Замечание 2. Длины отрезков IO и IH могут оказаться связанными любыми знаками неравенств. Это можно показать геометрически.

В.Сендеров

М1488. *а) Существует ли бесконечная последовательность квадратов натуральных чисел, в которой каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих? б) Существует ли возрастающая последовательность квадратов натуральных чисел, в которой сумма двух любых соседних чисел — квадрат целого числа?*

а) Ответ: нет.
Предположим, что такая последовательность существует. Без ограничения общности можно считать, что соседние числа этой последовательности взаимно просты (убедитесь в этом).
Если $a^2+b^2=c^2$, где a, b, c — взаимно простые числа, то c нечетно, а одно из чисел a и b делится на 2 (если a и b нечетны, то сумма их квадратов делится на 2, но не делится на 4). Поэтому, с одной стороны, все числа, начиная с третьего, должны быть нечетными, а, с другой стороны, среди них обязательно должны содержаться четные числа.
б) Ответ: да.

Достаточно найти число a, представимое двумя различными способами в виде произведения чисел разной четности: $a = bc = mn$ так, что $0 < b^2 - c^2 < 2a < m^2 - n^2$ и $m^2 - n^2 = k(b^2 - c^2)$. В этом случае последовательность

$$x = b^2 - c^2,\ y = 2a,\ kx,\ ky,\ k^2x,\ \ldots$$

удовлетворяет условиям задачи.

Наименьшее число, разложимое двумя различными способами в произведение четного и нечетного чисел, — число шесть: $6 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$. Имеем $3^2 - 2^2 = 5 < 12 < 36 - 1$, $35 = 7 \cdot 5$.

Получили последовательность: 5, 12, 35, 84, 245,...

О.Крижановский

М1489. ***Для каких прямоугольников $m \times n$ на клетчатой бумаге, в клетках которых расставлены нули и единицы, можно получить из любой расстановки любую другую, если разрешается изменять числа одновременно в каждой строке, каждом столбце и на каждой прямой, параллельной диагоналям клеток (в частности, в угловых клетках)?***

Ответ: это всегда возможно для прямоугольников $m \times n$, лишь если m и n не больше 3. Поскольку операции можно выполнять в обратном порядке, достаточно выяснить, для каких таблиц $m \times n$ из любой расстановки можно получить таблицу из одних единиц.

Легко видеть, что для прямоугольников $1 \times n$, $2 \times n$ и $3 \times n$ заменами знаков можно получить таблицу из одних единиц: на рисунке 1 указан порядок, в котором нули, стоящие в некоторых клетках, можно заменить на единицы (цветные линии показывают, какой именно — вертикальный или диагональный — «ход» следует делать).

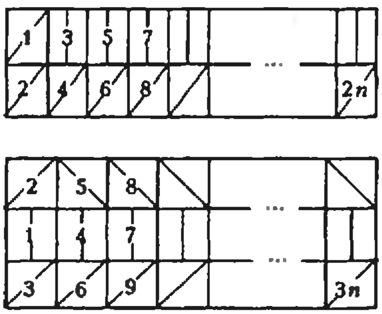


Рис. 1

Рис.2

С другой стороны, в прямоугольнике $m \times n$, где m и n не меньше 4, можно выделить фигуру из восьми клеток, показанных на рисунке 2 штриховкой; четность количества единиц в этих клетках не меняется при всех разрешенных преобразованиях — является, как говорят, *инвариантом*. Таким образом, если в одной из таких фигур стоит нечетное число единиц, то прийти к таблице, заполненной единицами, невозможно.

Представляем читателям выяснить, образуют ли такие таблицы из 8 клеток полную систему инвариантов, т.е. следует ли из четности количества единиц в каждой из них возможность преобразовать таблицу в состояние «все единицы», а заодно выяснить, сколько существует классов (неэквивалентных друг другу) таблиц относительно разрешенных в условии преобразований.

А.Галочкин

М1490. ***Пусть x, y, z — длины сторон треугольника, периметр которого меньше π. Докажите, что а) из синусов x, y, z также можно составить треугольник, причем б) его площадь не превосходит 1/8 суммы синусов $2x$, $2y$, $2z$.***

Пункт а) задачи легко доказать непосредственно. Дадим, однако, такое решение пункта б), из которого утверждение пункта а) будет следовать автоматически.

Так как $\pi > x + y > z$, $\pi > y + z > x$, $\pi > z + x > y$, то существует трехгранный угол, плоские углы при вершине O которого — $2x$, $2y$ и $2z$. Отложим на образующих трехгранный угол лучах единичные отрезки OA, OB и OC; пусть $\angle BOC = 2x$, $\angle COA = 2y$, $\angle AOB = 2z$.

Имеем: $AB = 2\sin z$, $BC = 2\sin x$, $AC = 2\sin y$.

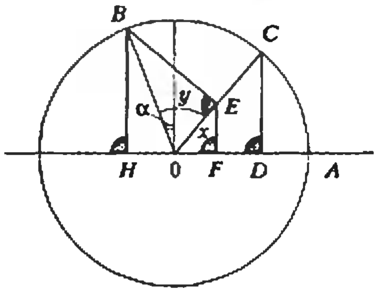
Следовательно, $S_{ABC} = 4S$, где S — площадь треугольника со сторонами $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$. Далее,

$$S_{ABC} < S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \frac{1}{2}(\sin 2z + \sin 2x + \sin 2y).$$

Неравенство пункта б) доказано.

Замечание. Дадим, в дополнение, чисто геометрическое решение пункта а).

Пусть $\angle AOB = x + y \ge \frac{\pi}{2}$ (см. рисунок). Тогда $z < \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\sin z < \sin(x + y)$. Если $x + y < \frac{\pi}{2}$, то последнее неравенство очевидно.



Докажем (геометрически), что $\sin(x + y) < \sin x + \sin y$.

Имеем: $\sin x = CD$, $\sin y = BE$. Но $CD > EF$, $BE + EF > BH = \sin(x + y)$.

В.Уфнаровский

Ф1498. ***Маленькое тело массой m движется не отрываясь по внутренней гладкой поверхности вертикального цилиндра радиусом R. Начальная скорость тела составляет угол α с вертикалью. Известно, что наивысшая точка траектории тела находится точно над начальной. Чему равна сила, с которой тело давит на поверхность цилиндра в высшей точке траектории?***

В условии задачи не задана величина скорости, обозначим ее v. Пусть полное число витков до верхней точки составляет n, а время одного оборота T. Теперь запишем кинематические уравнения для движения тела в горизонтальной плоскости и по вертикали:

$$2\pi Rn = v\sin\alpha \cdot T,\quad v\cos\alpha = gT.$$

Отсюда для искомой силы получаем

$$F=\frac{m(v\ln\alpha)^2}{R}=2mg\pi\operatorname{tg}\alpha\cdot n,$$

где n может быть любым натуральным числом.

Э.Прут

Ф1499. *Грузы, массы которых M и m, соединили легкой пружинкой. Систему положили на гладкий горизонтальный стол, пружинку немного сжали, и с двух сторон поставили упоры, не дающие грузам разъезжаться (см. рисунок). Уберем один из упоров — со*

стороны груза M. Система начнет двигаться. Во сколько раз изменится скорость движения, если убрать не этот упор, а другой? Как относятся максимальные удлинения пружинки в этих двух случаях?

После того как мы убрали упор со стороны груза M, второй груз остался прижатым к своему упору — он начнет двигаться в тот момент, когда прижимающая сила обратится в ноль. После этого упор уже не влияет на движение системы.

В момент, когда приходит в движение груз m, пружина не деформирована, и скорость v_1 груза M можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{Mv_1^2}{2}=\frac{kx_0^2}{2},\quad v_1=x_0\sqrt{\frac{k}{M}},$$

где k — жесткость пружинки, x_0 — начальное сжатие пружинки. Под скоростью движения системы следует подразумевать скорость центра масс. Ее можно найти из закона сохранения импульса — в указанный момент скорость второго груза равна нулю:

$$v_{ц1}=\frac{Mv_1}{M+m}=\frac{x_0\sqrt{kM}}{M+m}.$$

Максимальная длина пружинки соответствует моменту равенства скоростей грузов, когда они движутся со скоростью центра масс. Максимальное удлинение пружинки x_1 можно найти опять же из закона сохранения энергии:

$$\frac{kx_0^2}{2}=\frac{kx_1^2}{2}+\frac{(M+m)v_{ц1}^2}{2},\quad x_1=x_0\sqrt{\frac{m}{M+m}}.$$

Для анализа второго случая не нужно снова записывать и решать уравнения — достаточно соответствующим образом заменить в ответах массы грузов. Окончательно получим

$$\frac{v_{ц1}}{v_{ц2}}=\sqrt{\frac{M}{m}},\quad \frac{x_1}{x_2}=\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

М.Учителев

Ф1500. *Легкий блок подвешен к потолку на пружине жесткостью k_1, через блок переброшена нить. Один из концов нити прикреплен к полу при помощи пружины жесткостью k_2, к другому концу прикреплен груз массой m. Система находится в равновесии, нити вертикальны. Сместим немного груз по вертикали и отпустим его. Каким будет период вертикальных колебаний груза?*

Пусть груз в начальный момент немного сместили вниз. Тогда натяжение нити, привязанной к грузу, возрастет на некоторую величину F, и пружина с другой стороны блока удлинится на F/k_2. Натяжение другой нити, при помощи которой блок подвешен к потолку, увеличится на удвоенную величину, и верхняя пружина удлинится на $2F/k_1$. Смещение груза по вертикали составит при этом

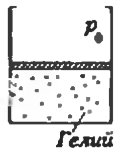
$$x=\frac{F}{k_2}+2\frac{2F}{k_1}.$$

Таким образом, мы получаем обычное колебательное уравнение, которое связывает возвращающую силу F со смещением x от положения равновесия. Период таких колебаний равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{m\frac{x}{F}}=2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_2}+\frac{4}{k_1}\right)}.$$

Р.Александров

Ф1501. *В вертикальном цилиндрическом сосуде объемом V под легким подвижным поршнем содержится некоторое количество гелия при температуре T_0 (см. рисунок). Наружное атмосферное давление равно p_0,*



поршень находится в равновесии и делит сосуд пополам. Газ медленно нагревают, увеличивая его температуру до $3T_0$. Сверху сделан упор, который не дает поршню выскочить из сосуда. Какое количество теплоты получил газ при нагревании?

Сначала газ расширяется при постоянном давлении и толкает поршень вверх, пока тот не достигнет упора. Объем газа при этом увеличится от $V/2$ до V. Дальнейший нагрев происходит при постоянном объеме. Теперь воспользуемся первым законом термодинамики и найдем полученное газом тепло (работу газ совершает только при расширении):

$$Q=A+\Delta U=p\Delta V+\frac{3}{2}\nu R\Delta T=$$

$$=p_0\frac{V}{2}+\frac{3}{2}\nu R\cdot 2T_0=p_0\frac{V}{2}+3p_0\frac{V}{2}=2p_0V.$$

Видно, что значение температуры не вошло в ответ. Однако эта задача не является «переопределенной» — данные в условии величины не противоречат друг другу (вот если бы мы задали еще и число молей, то пришлось бы тщательно подбирать числа — ведь тогда можно было бы одну из величин просто выразить через остальные).

А.Зильберман

Ф1502. *С двумя молями кислорода совершают циклический процесс. Сначала газ нагревают на 0,1 К, сообщив ему при этом количество теплоты $Q = 1000$ Дж, потом дают возможность охладиться на 100 К без теплообмена с окружающей средой, затем газ сжимают, совершив над ним работу $A = 700$ Дж, газ при этом нагревается на 0,1 К, и, наконец, сжимают до* *начального объема V = 100 л без теплообмена с окружающей средой. Все процессы проводят медленно. Найдите начальную температуру и начальное давление газа.*

При нагревании двух молей кислорода на $\Delta T_1 = 0{,}1$ К его внутренняя энергия увеличится на

$$\Delta U = \frac{5}{2}\nu R \cdot \Delta T_1 \approx 4 \text{ Дж} \ll Q = 1000 \text{ Дж}.$$

Это означает, что процесс практически не отличается от изотермического расширения. После анализа всего цикла легко видеть, что он представляет собой знакомый цикл Карно и, следовательно, можно пользоваться формулой для КПД этого цикла. При изотермическом расширении от нагревателя отнимается количество теплоты $Q = 1000$ Дж, а при изотермическом сжатии работа $A = 700$ Дж, которую мы совершили, отдается холодильнику в виде тепла. Значит, полезная работа в цикле составляет 300 Дж и КПД цикла $\eta = 0{,}3$. Зная разность температур нагревателя и холодильника $\Delta T = 100$ К, можно найти температуру нагревателя — при этой температуре газ находился в начальном состоянии:

$$T_н = \frac{\Delta T}{\eta} = 333 \text{ К}.$$

Теперь найдем начальное давление газа:

$$p_н = \frac{\nu R T_н}{V} \approx 55 \text{ кПа}.$$

Ц.Карнов

Ф1503. *В лаборатории работает криостат — установка для поддержания в рабочей камере очень низкой температуры. В описываемом случае эта температура составляет всего $3 \cdot 10^{-6}$ К, и установка при работе потребляет от электросети мощность 10 кВт. Мощность установки можно еще увеличить на 10%. Теоретики, толпой обступившие установку, начинают громко спорить о том, является ли эта установка идеальной тепловой машиной (работающей по обращенному циклу) или не является. При этом уровень шума (мощность звуковых волн, падающих на единицу площади поверхности) достигает величины 1/10000 Вт/м^2. Хватит ли запаса мощности установки, чтобы поддерживать и в этих условиях нужную температуру в рабочей камере? Полная площадь наружных стенок криостата составляет 0,5 м^2. Считайте, что практически вся энергия звуковых волн поглощается при падении на наружную поверхность криостата и рассеивается внутри холодной камеры.*

Считая систему отвода тепла от холодной рабочей камеры идеальной обращенной тепловой машиной, получим соотношение между работой машины A и количеством отданного помещению тепла Q:

$$\frac{A}{Q} = 1 - \frac{T_х}{T_п},$$

где $T_п = 300$ К. При этом тепло, отнимаемое от холодной камеры, составляет

$$q = Q - A = A\frac{T_х}{T_п}.$$

Теперь подсчитаем тепловую мощность, дополнительно отбираемую от камеры криостатом, и сравним ее с мощностью звуковых волн, поступающей в камеру:

$$0{,}1 \cdot 10^4 \frac{3 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^2} \text{ Вт} = 10^{-5} \text{ Вт} < 0{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Вт} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}.$$

Видно, что запас мощности примерно в 5 раз меньше необходимой величины и вред от теоретиков существенно превышает пользу от них же (подсказка об обращенной тепловой машине).

В.Шухман

Ф1504. *Несколько одинаковых лампочек включены последовательно. При подключении батарейки к одной из них ток через лампочку составил 0,27 А. Когда эту батарейку подключили к двум последовательно соединенным лампам, ток стал 0,18 А, при трех лампочках получился ток 0,14 А, при четырех — 0,12 А, при пяти — 0,1 А. Теперь две такие батарейки подключают к гирлянде лампочек — одну между точками А и В (рис. 1), другую между точками Б и Г. Найдите ток каждой лампочки в этом случае.*

Рис. 1

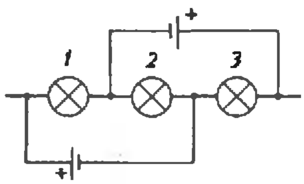


Рис.2

Все зависит от полярности подключения батареек. В случае, изображенном на рисунке 2, токи оказываются такими:

$$I_1 = 0{,}27 \text{ А}, \; I_2 = 0, \; I_3 = 0{,}27 \text{ А}.$$

Для случая, соответствующего рисунку 3, придется решать задачу графически — рисовать график суммарного напряжения двух ламп, причем ток через одну из них ровно вдвое больше, чем через другую. В итоге получим

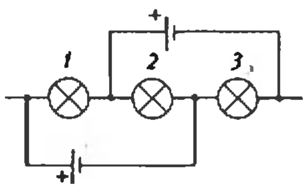


Рис.3

$$I_1^* = 0{,}11 \text{ А}, \; I_2^* = 0{,}22 \text{ А}, \; I_3^* = 0{,}11 \text{ А}.$$

З.Рафаилов

Ф1505. *Полупроводниковый терморезистор нагревают протекающим через него постоянным по величине током. Сопротивление терморезистора можно считать обратно пропорциональным его абсолютной темпера-*

туре: $R = A/T$. От начальной температуры 300 К до 310 К терморезистор нагрелся за 10 секунд. Через какое время он нагреется до 350 К? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

При нагреве постоянным током I_0 в течение малого отрезка времени Δt (малый отрезок берем потому, что сопротивление терморезистора меняется по мере нагрева, а за малый отрезок времени этими изменениями можно пренебречь) температура терморезистора меняется на величину ΔT, соответствующую равенству

$$C\Delta T = I_0^2 R\Delta t,$$

где C — теплоемкость терморезистора. Отсюда получаем

$$\Delta t = \frac{C}{I_0^2 A} T\Delta T.$$

Время, необходимое до полного нагрева, находится суммированием малых отрезков времени Δt — в правой части уравнения приходится суммировать слагаемые типа $T\Delta T$. Результат пропорционален разности квадратов конечной и начальной температур (для тех, кто умеет интегрировать, — это простая операция; если это затруднительно, можно нарисовать график линейной функции и подсчитать площадь под графиком).

Итак, для отношения времен нагрева можно записать

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\left(350^2 - 310^2\right)}{\left(310^2 - 300^2\right)} \approx 4{,}3.$$

Следовательно, до 350 К терморезистор нагреется еще через 43 секунды.

А.Зильберман

Ф1506. *Из очень тонкой проволоки сделан виток в виде квадрата, его индуктивность составляет 1 мГн. Вплотную к этому витку придвинули точно такой же по размерам сверхпроводящий виток, плоскость которого перпендикулярна плоскости первого витка и одна сторона практически совпадет с одной из сторон первого витка (получились соседние грани куба). Электрического контакта между витками нет. Измеренная в этих условиях индуктивность первого витка составила 0,95 мГн. Теперь расположим витки иначе — сверхпроводящий виток находится напротив основного (первого) витка, плоскости витков параллельны друг другу (противоположные грани куба). Расстояние между витками равно стороне квадрата. Чему теперь будет равна индуктивность основного витка?*

Пропустим по основному витку ток I_0. Весь поток вектора магнитной индукции $\Phi_0 = L_0 I_0$ пройдет через четыре боковые грани и верхнюю грань достроенного куба:

$$\Phi_0 = 4\Phi_{бок} + \Phi_в.$$

Если в одной из боковых граней куба находится сверхпроводящий виток, магнитный поток через него не может изменяться. Следовательно, наведенный в нем индукционный ток создает магнитный поток, равный $\Phi_{бок}$, т.е.

$$\Phi_{бок} = L_0 I_{бок}.$$

Поток, который вычитается из основного, и создается током бокового контура, а именно

$$L_1 I_0 = L_0 I_0 - \Delta\Phi, \; \Delta\Phi = \frac{\Phi_{бок} I_{бок}}{I_0} = \frac{\Phi_{бок}^2}{L_0 I_0},$$

отсюда

$$\Phi_{бок} = I_0\sqrt{L_0\left(L_0 - L_1\right)}.$$

Когда сверхпроводящий виток находится в верхней грани куба, по аналогии можно записать

$$L_2 I_0 = L_0 I_0 - \frac{\Phi_в^2}{L_0 I_0}.$$

С другой стороны,

$$\Phi_в = \Phi_0 - 4\Phi_{бок}.$$

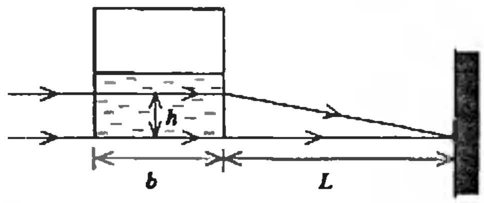
Окончательно получаем

$$L_2 = L_0 - \frac{\Phi_в^2}{L_0 I_0^2} = L_0 - \frac{\left(L_0 - 4\sqrt{L_0\left(L_0 - L_1\right)}\right)^2}{L_0} \approx 0{,}988 \text{ мГн}.$$

О.Шпырко

Ф1507. *Тонкостенный кубический аквариум объемом $V = 8$ л заполнен до половины водой. В воду насыпают соль, в результате коэффициент преломления соленой воды на дне аквариума составляет $n_0 = 1,35$ и убывает с высотой h по квадратичному закону: $n = n_0 - ah^2$, где $a = 1$ м$^{-2}$. На боковую стенку аквариума падает параллельный световой пучок, перпендикулярный поверхности. На каком расстоянии от аквариума нужно поставить экран, чтобы получить на нем максимально яркую световую полоску?*

Для получения максимально яркой полоски на экране он должен быть расположен так, чтобы время распространения лучей, попадающих на экран по различным путям, было одним и тем же. Считая, что внутри аквариума лучи идут параллельно, для самого нижнего луча



и для луча, попавшего в аквариум на высоте h (см. рисунок), можно записать

$$\frac{b}{c/n_0} + \frac{L}{c} = \frac{b}{c/\left(n_0 - ah^2\right)} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{c},$$

где $b = \sqrt[3]{V}$ — ширина аквариума, L — расстояние до экрана, c — скорость света в вакууме. После простых преобразований (с учетом того, что $h \ll L$) получим

$$L = \frac{1}{2ab} = \frac{1}{2a\sqrt[3]{V}} \approx 1{,}77 \text{ м}.$$

Величина h из формулы ушла — это означает, что при всех вариантах прохождения лучей через воду условия для максимума совпадают. Следовательно, такой аквариум имеет свойства собирающей линзы.

А.Ольховец

Задачи

1. Из произведения $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1994\cdot 1995$ исключили все четные сомножители и сомножители, делящиеся на 5. Чему равна последняя цифра числа, полученного перемножением оставшихся сомножителей?

Н.Антонович

2. Те, кто уже принимали быстрорастворимый аспирин «Upsa», наверное обратили внимание на то, что таблетка аспирина, брошенная в воду, сначала падает на дно, выделяя большое количество пузырьков, но вскоре всплывает, продолжая выделять пузырьки газа.

Как объяснить причину всплытия таблетки?

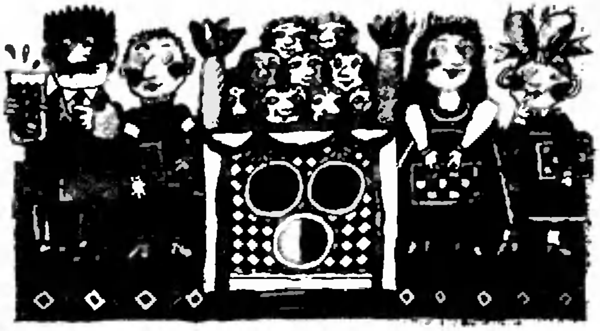
А.Савин

3. На острове Невезения живут 100 человек, причем некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Каждый житель острова поклоняется одному из трех богов — богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю острова задали три вопроса:

1) Поклоняетесь ли Вы богу Солнца?
2) Поклоняетесь ли Вы богу Луны?
3) Поклоняетесь ли Вы богу Земли?

На первый вопрос утвердительно ответили 60 человек, на второй — 40 человек и на третий — 30 человек. Сколько лжецов на острове?

Ф.Назаров



4. Расставьте по кругу четыре единицы, три двойки и три тройки так, чтобы сумма любых трех подряд стоящих цифр не делилась на 3.

С.Берлов

5. Во время семейного шахматного турнира, в котором приняли участие мать, ее брат, ее сын и дочь, двое игроков были близнецами. Известно, что пол близнеца игрока, занявшего последнее место, противоположен полу победителя, а победитель и игрок, занявший последнее место, — лица одинакового возраста.

Кто был победителем в этом турнире?

А.Савин

Конкурс «Математика 6—8»

Мы начинаем очередной конкурс «Математика 6—8», в котором могут участвовать как отдельные школьники 6—8 классов, так и математические кружки. Задачи конкурса будут опубликованы в № 5, 6 за 1995 г. и в № 1, 2 за 1996 г.
Решения задач, опубликованных в этом номере, следует прислать не позже 1 января 1996 г. по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, "Квант" (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»).
Не забудьте указать фамилию, имя, класс.
Победители конкурса будут награждены призами журнала.

1. С тройкой чисел можно производить следующую операцию: взять два из них и заменить их на среднее арифметическое и среднее геометрическое этих чисел, а третье оставить без изменения.

Можно ли, несколько раз применив эту операцию, получить из тройки чисел $2-\sqrt{2}$, 1, $2\sqrt{2}+3$ тройку $\sqrt{2}-1$, 2, $3\sqrt{2}-1$?

А.Грибалко

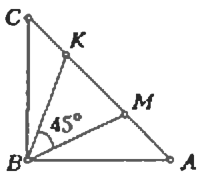


Рис. 1

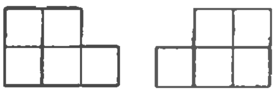


Рис. 2

2. На гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника ABC взяты точки M и K такие, что угол MBK равен 45° (рис. 1). Докажите, что $MK^2 = AM^2 + KC^2$.

В.Произволов

3. Найдите какое-нибудь натуральное число, которое при делении на все натуральные числа от 2 до 10 включительно дает остаток, не меньший половины делителя. А каково наименьшее такое число?

И.Акулич

4. Можно ли замостить прямоугольник 7×15 фигурками из пяти клеточек 1×1, изображенными на рисунке 2?

В.Замков

5. На шахматной доске расставлены 11 коней так, что никакие два не бьют друг друга. Докажите, что можно поставить еще одного коня так, чтобы вновь никакие два коня не били друг друга.

Р.Женодаров

Древняя наука и «Таинственный остров»

А. ЖУКОВ

— Мистер Браун, это правда, что вы были одним из аэронавтов, об удивительных приключениях которых рассказал Жюль Верн в романе «Таинственый остров»?

В почитаемом и уважаемом преподавателе чероккского[1] колледжа трудно было узнать самого юного героя романа знаменитого писателя, но это был именно он — Герберт Браун, наравне со взрослыми оказавшийся в пору весеннего равноденствия 1865 года на необитаемом острове в необозримых просторах Тихого океана. Мистер Браун на миг прикрыл глаза, и в памяти, как наяву, всплыла картина бушующего океана: свирепые волны и аэростат, обреченно снижающийся к ревущей пучине. «И тогда раздался мужественный голос — голос человека смелого, чье сердце не ведает страха. На оклик его ответили голоса не менее решительные.

— Все выбросили?

— Нет! Осталось золото — десять тысяч франков!

И тотчас тяжелый мешок полетел в океан.

— Поднялся шар?

— Чуть-чуть. Сейчас опять упадет!

— Что еще можно выбросить?

— Ничего!

— Ничего? А гондола?

— Цепляйтесь за сетку. А гондолу в воду!» [1]

— Да, — сказал мистер Браун, — волею провидения мне посчастливилось испытать неимоверные приключения в компании мужественных и отважных людей. Неистощимая энергия, трудолюбие и сила воли инженера Сайреса Смита, журналиста Гедеона Спилета, Наба, моряка Пенкрофа помогли нам не только выстоять под ударами грозных сил стихии, но и создать на необитаемом острове настоящую колонию. Мы построили мосты, каналы, плотины и даже — сейчас в это трудно поверить! — электрический телеграф. Нам пришлось проделать как бы заново весь путь, пройденный человечеством: начать с изготовления примитивных орудий труда и добычи огня, а кончить довольно сложными механизмами.

— Мы читали! — похвастался мальчик с передней парты. — У инженера Сайреса Смита была поистине золотая голова.

— И золотые руки! — поддержали остальные дети.

— Да, — закивал сединой мистер Браун. — В свое время я учился у профессоров Бостона, но лучшего учителя, чем Сайрес Смит, мне встречать не доводилось. Это был настоящий инженер, ученый, человек энциклопедических знаний. Как сейчас помню: близится прекрасная тихая ночь. На горизонте, резко разграничивая море и небо, серебрится нежное бледное сияние — лунная заря. Сайрес Смит сосредоточенно направляет один конец самодельного деревянного циркуля на линию горизонта, а другой — на альфу Южного Креста.

— Мистер Браун, вы сейчас вспомнили, как Сайрес Смит определял координаты острова?

— Да-да, координаты острова...

— Мистер Браун, пожалуйста, расскажите об этом подробнее!

— С превеликим удовольствием. Неизвестно, какие сюрпризы готовит судьба каждому из вас, и я был бы счастлив, если бы наш опыт кому-то сослужил добрую службу.

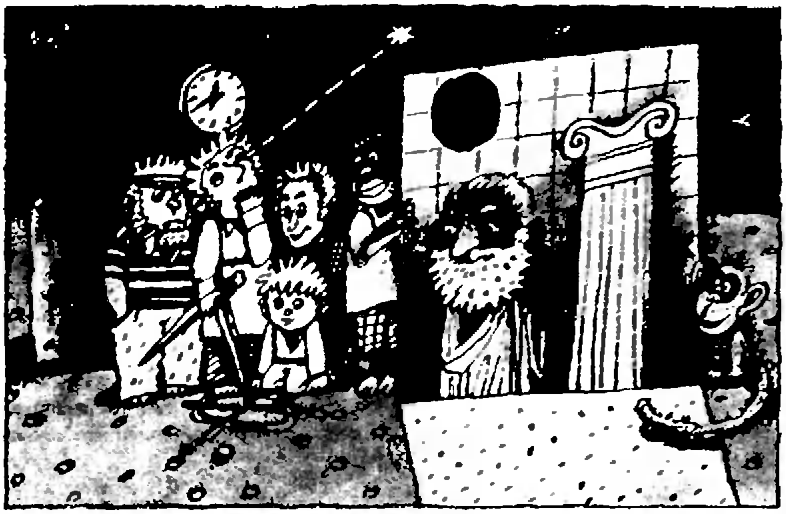
Ориентируясь на местности, прежде всего нужно грубо, приблизительно оценить свое местоположение. Мы знали, что ураганный ветер, дующий с северо-востока, мог забросить наш шар в акваторию Тихого океана...

— А созвездия южного неба: Южный Крест, Скорпион, Рыбы, Звездный треугольник свидетельствовали о том, что вы попали в южную часть Тихого океана!..

— Совершенно верно. Но Тихий океан велик. Где же конкретно мы оказались — в пустынных его местах или же вблизи обитаемых берегов? Ответ на этот вопрос помог бы решить следующий — что важнее было бы делать в нашем положении: строить надежный дом или хороший корабль? Вот почему Сайрес Смит взялся определить координаты острова — его широту и долготу.

Как вы знаете, в географии долгота отсчитывается к востоку и к западу от Гринвичского меридиана от 0° до 180°. В первом случае долгота называется восточной, во втором — западной. Отправляясь, скажем, от Вашингтонского меридиана и равномерно перемещаясь на запад, мы равномерно будем увеличивать свою западную долготу. Можете ли вы назвать объекты, которые равномерно и постоянно, изо дня в день, из года в год перемещаются к западу?

[1] *Чероки — небольшой город в штате Айова, США.*



— Это звезды!

— Это солнце!

— Они перемещаются к западу по небосводу!

— Замечательно! В чем еще, кроме угловой меры, можно измерить это перемещение?

— Солнечной тенью!

— Солнечными часами!

— Временем!

— Превосходно! Итак, между временем и долготой существует некоторая связь. В самом деле, Земля за 24 часа совершает один оборот вокруг своей оси. Следовательно, за один час земной шар поворачивается на 15°. Зная разницу в часах Δt между местным временем на начальном, скажем, Вашингтонском меридиане, и местным временем на меридиане точки наблюдения к западу от Вашингтона, мы можем перевести эту разность в градусы долготы по формуле

$$\lambda = \lambda_0 + 15\Delta t, \qquad (*)$$

здесь λ_0 — западная долгота Вашингтона, а λ — западная долгота точки наблюдения (промежуток времени Δt, конечно, предполагается не очень большим, чтобы значение λ укладывалось в пределы от 0° до 180°. Впрочем, это ограничение несложно обойти). Таким образом, основная трудность в определении долготы острова Линкольна (вы, наверное, помните, что свой остров мы назвали в честь благороднейшего гражданина Американской республики) свелась к определению разности в часах местного времени Δt.

— Мистер Браун, но ведь у Гедеона Спилета в момент катастрофы с воздушным шаром уцелели часы!

— Верно. Более того — по чистой случайности его часы совершенно не пострадали и продолжали показывать местное время на меридиане Вашингтона. Часы у него были с превосходным механизмом, и журналист по настоянию Сайреса Смита заводил их ежедневно, не переводя стрелок, самым тщательным образом. Шестнадцатого апреля, производя наблюдения за длиной тени, отбрасываемой на песок воткнутой палочкой, инженер установил прохождение солнца через меридиан острова. Полдень на острове Линкольна случился в тот момент, когда в Вашингтоне уже было пять часов вечера. Зная западную долготу Вашингтона $\lambda_0 = 77°$ и подставив в формулу $(*)$ значение $\Delta t = 5$ часов, Сайрес Смит оценил долготу острова: $\lambda = 152°$ западной долготы. А учитывая вероятные ошибки в наблюдении, Сайрес Смит счел возможным сообщить товарищам, что остров лежит между сто пятидесятым и сто пятьдесят пятым меридианом к западу от Гринвича.

— Мистер Браун, а почему Сайрес Смит проводил свои наблюдения не сразу, прибыв на остров, а лишь спустя месяц? Ведь это оказалось так просто!

— Просто? Хм... Все действительно было бы просто, если бы солнце по небосводу перемещалось равномерно.

— Как? Неужели оно движется неравномерно?

— Видите ли, человеческий глаз — не лучший, хотя и полезный инструмент для астрономических наблюдений. Доказано, что солнце путь свой над нами держит неравномерно. Причин здесь несколько — и наклон земной оси вращения к плоскости орбиты, и отличие этой орбиты от круговой, и неравномерность движения Земли по орбите... Чтобы получить среднее солнечное время, текущее равномерно, нужно к так называемому истинному солнечному времени, которое показывают обычные солнечные часы — тень от воткнутой в песок палочки, — добавить некоторую поправку. Величина этой временной поправки, например, в ноябре месяце может достигать шестнадцати минут. Кстати, какой ошибке в определении долготы соответствует эта поправка, если ее рассчитывать по формуле $(*)$?

— Четырем градусам.

— Вот видите, пренебрегать ею было бы неразумно. Лишь четыре раза в год поправка равна нулю — это бывает около 15 апреля, 14 июня, 1 сентября и 25 декабря.

— Почему «около»?

— Потому что год не содержит целого числа суток и указанные даты могут изменяться в пределах 1—2 дней.

— Мистер Браун, а как Сайрес Смит определял широту острова?

— Определение широты основано на так называемой теореме о высоте полюса мира. Для непосвященных это звучит несколько загадочно и торжественно, хотя сама теорема представляет собой довольно простой факт элементарной геометрии. Скажите, пожалуйста, кому-либо из вас доводилось фотографировать звездное небо, особенно в его северной части?

— Да, — поднялся рослый мальчик со среднего ряда. — Я фотографировал. Если устанавливать большую выдержку, то на диапозитиве видны концентрические дуги различных радиусов, центр которых близок к Полярной звезде. Эти дуги — траектории звезд на небосводе.

— Замечательно, Роберт! — мистер Браун дружелюбно улыбнулся. — Несомненно, твой опыт удостоился бы высокой похвалы Сайреса Смита. Действительно, на небосводе можно обнаружить неподвижную точку, вокруг которой, как нам кажется, движутся звезды. Эта точка называется северным полюсом мира. Точно так же, если фотографировать небо в южном полушарии, можно выделить точку, называемую южным полюсом мира. Прямая, соединяющая полюс мира с точкой наблюдения, в астрономии получила название оси мира. Древние полагали, что все звезды укреплены на прозрачной хрустальной сфере, которая медленно вращается вокруг оси мира, завершая полный оборот за сутки.

— Мистер Браун, но ведь у разных наблюдателей будут получаться разные оси мира?

— Действительно, это так. Но, где бы ни находился наблюдатель, его ось мира будет параллельной оси вращения Земли. Понять это легче всего, представив себе звездный купол в виде большой хрустальной сферы, которую воображали древние вокруг нашей планеты. Точка, в которой пересекает сферу земная ось вращения, по мере увеличения радиуса сферы будет удаляться в бескрайние просторы вселенной, в бесконечность, и по мере этого удаления ось мира земного наблюдателя будет все больше приближаться к прямой, параллельной оси вращения Земли. Кстати, огромные космические расстояния по сравнению с земными позволяют говорить и о практической параллельности лучей звезды, достигающих различных точек земной поверхности.

А теперь ответьте, пожалуйста, на такой вопрос. Если мы, выйдя из Чероки, направимся по меридиану строго на север, что будет происходить с северным полюсом мира?

— Он будет подниматься все выше и выше над горизонтом.

— Угол, который составляет ось мира с плоскостью горизонта, в аст-

(Окончание см. на с.34)

А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМЫ ВАМ

световые лучи?

Испускаемые глазами лучи распространяются по прямому пути.

Евклид

Зрительный образ получается с помощью лучей, испускаемых видимыми телами и попадающих в глаз.

Альхазен

...каждая малая часть волны обязательно продвигается по прямой, исходящей из светящейся точки. В этом смысле можно принимать лучи света за прямые линии.

Христиан Гюйгенс

...относительно света неизвестно ни одного случая, чтобы он распространялся по извилистым проходам или загибался внутрь тени.

Исаак Ньютон

Казалось бы, что может быть более «наглядным», чем свет? Однако, если судить по приведенным в эпиграфе высказываниям, порой и у великих естествоиспытателей мысль начинала «блуждать в потемках», лишь только речь заходила о лучах света. Закон прямолинейного распространения света, установленный на опытах еще в древности, был словно лакмусовой бумажкой для любой теории света, требуя от нее своего объяснения. Представления наших далеких предков, какими бы наивными они ни казались сегодня, определили все дальнейшее развитие взглядов ученых на природу и действия света.

Вот и понятие светового луча давным-давно пришло к нам из повседневной жизни. Это и наблюдения за тенями и небесными светилами, и освоение художниками и строителями метода перспективы, и измерения земельных участков. А разве сейчас не приходится сталкиваться с задачами, где не обойтись без этого понятия?

Попробуйте и вы за игрой света и тени в нынешнем «Калейдоскопе» разглядеть ту важную роль, которую играет закон прямолинейного распространения света.

Христиан Гюйгенс

Исаак Ньютон

Вопросы и задачи

1. Круглый карандаш и цилиндрическая газосветная лампа расположены параллельно друг другу. Какой будет область полной тени от карандаша?

2. Почему в проекционных аппаратах не используются цилиндрические лампы дневного света?

3. Как следует расположить точечный источник света, плоский предмет и экран, чтобы контур тени на экране был подобен контуру предмета?

4. В каком случае непрозрачный предмет даст тень без полутени?

5. При каких условиях от предмета получается только полутень?

6. Как можно обнаружить, что вы оказались в области полутени некоторого предмета?

7. Почему неровности дороги днем видны хуже, чем ночью при освещении дороги фарами автомобиля?

8. В лесах с высокими деревьями и густой листвой в ясные дни можно наблюдать круглые светлые пятна на земле. Что это за пятна? Отчего они круглые?

9. Всегда ли тень, отбрасываемая шаром, имеет форму круга?

10. Почему тень от ног человека на земле резко очерчена, а тень от головы расплывчата?

11. При освещении мощной электрической лампой горящей свечи на белом экране появляется тень не только от свечи, но и от пламени. Разве источник света (пламя) может дать собственную тень?

12. Иногда осветительные приборы освещают не рабочие места, а потолок помещения. В чем преимущество такого способа освещения?

13. Тени от штанг футбольных ворот утром и вечером длиннее, чем днем. А вот изменяется ли длина тени от перекладины ворот?

14. Если в плотной бумаге проделать булавочное отверстие и, держа бумагу

примерно в десяти сантиметрах от правого глаза (левый зажмурен!), медленно поднимать гвоздик шляпкой вверх так, чтобы он касался ресниц, то в кружке света от отверстия появляется перевернутое изображение гвоздика, движущееся вниз. Почему?

15. Можно ли «закрыть» звезду спичкой (наблюдение ведется одним глазом)?

16. Почему, сидя у костра, нам кажется, что предметы, расположенные за ним, колеблются?

17. Лучи Солнца, падающие на Землю, практически параллельны. Почему же, пробиваясь сквозь тучи, они предстают расходящимися веером?

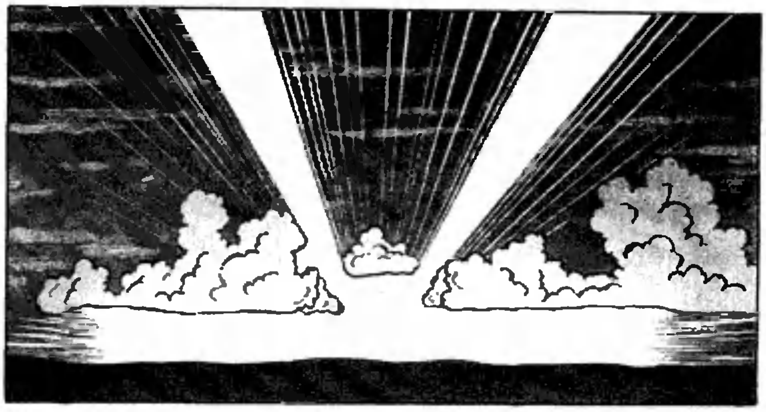
18. Что можно сказать о длинах двух частей горизонтальной линии, изображенной на рисунке?

Микроопыт

Расположите экран на небольшом — до 50 сантиметров — расстоянии от горящей свечи. Между ними поместите карандаш — один раз вертикально, а другой горизонтально. Какие получаются тени? Почему?

Любопытно, что...

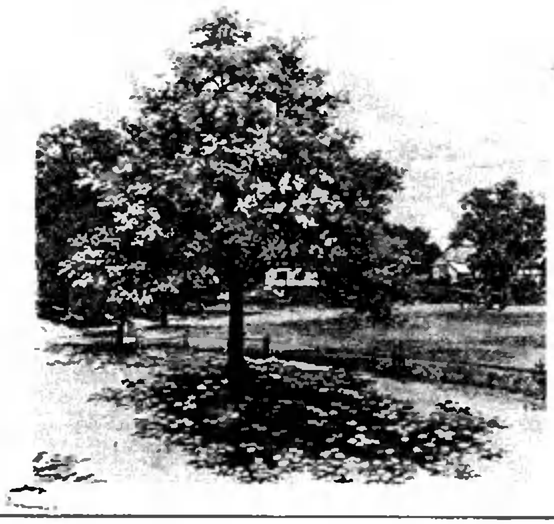
...модель прямолинейного светового луча, лежащую в фундаменте геометрической оптики, создал Евклид. В своей «Оптике» он исследовал такие вопросы, как образование тени, получение изображений с помощью малых отверстий, кажущиеся размеры предметов и их расстояния от глаза.



...в средние века оптика, учение о перспективе и метеорология представляли собой единую науку. В оптических вопросах царила большая путаница, а зрительному восприятию доверяли мало, считая зрение наиболее обманчивым из чувств.

...оптика в точном значении слова — наука о зрении. Только исследуя камеру-обскуру, ученые наконец расстались с идеей о светоносных лучах, исходящих из наших глаз, и превратили оптику в учение о свете.

...основы современной геометрической оптики изложил Иоганн Кеплер в 1604 году. Тогда им была написана работа под названием «Паралипомены (дополнения — *А.Л.*) к Вителлию», в которой он объяснил действие как глаза, так и любого оптического прибора, рассматривая каждую точку предмета в качестве источника расходящихся лучей. Мотивом для создания этого фундаментального труда послужило стремление удовлетворить нужды астрономии.



...известный принцип Гюйгенса был выдвинут им для того, чтобы показать, что волновая теория света способна объяснить уже установленные законы оптики, в том числе и закон прямолинейного распространения света. Но удалось это сделать лишь Френелю, уточнившему принцип Гюйгенса.

...первый оптический (семафорный) телеграф связал в конце XVII века Париж с городом Лиллем. К середине прошлого века в России действовало уже несколько оптических телеграфных линий, крупнейшей из которых была линия Петербург — Варшава, имеющая 149 промежуточных пунктов. Сигнал между этими городами проходил всего за несколько минут, разумеется, только днем и при хорошей видимости.

...угол зрения глаза человека много больше, чем нам кажется. События, происходящие под углом 90° в каждую сторону от прямого взгляда, оказывается, могут непосредственно фиксироваться нашим подсознанием.

...опыты физиков и врачей лишь в XX веке доказали, что именно мозг еще раз переворачивает полученное «вверх ногами» изображение предметов в глазу. Для этого экспериментаторы надевали специальные очки, переворачивающие изображение. Через несколько дней мозг все вновь «ставил на место».

Что читать в «Кванте» о световых лучах

(публикации последних лет)

1. *«Космические иллюзии и миражи»* — 1988, № 7, с. 15;
2. *«Световые явления»* — 1990, № 11, с. 34;
3. *«Задачи про свет и цвет»* — 1991, № 1, с. 31;
4. *«Сверхсветовая тень и взрывающиеся квазары»* — 1991, № 12, с. 2;
5. *«Вариационные принципы»* — 1992, № 5, с. 44;
6. *«Космический мираж»* — 1992, № 12, с. 14;
7. *«Путешествие в луче отраженного света»* — 1995, № 2, с. 38;
8. *«Глаз и небо»* — 1995, №3, с.2.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с.30)

рономии называют высотой полюса мира.

— Ага, получается, что высота полюса мира пропорциональна географической широте точки наблюдения!

— Здесь уместно говорить не только о пропорциональности, но и о равенстве. Посмотрите на рисунок 1, на котором изображен земной шар. Высота полюса мира и географическая широта точки наблюдения являются углами с взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно, эти углы равны.

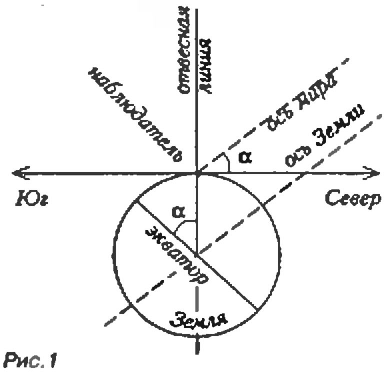


Рис.1

— Все ясно! Сайрес Смит определил высоту южного полюса мира!

— Да, и в этом ему помогли некоторые сведения из астрономии. У Роберта хорошая наблюдательность — фотографируя звездное небо, он заметил, что северный полюс мира находится вблизи Полярной звезды. Угловое расстояние между ними примерно 1°, так что Полярная звезда может служить хорошим маяком путешественникам. Несколько сложнее ориентироваться в южном полушарии — вблизи южного полюса мира нет такой яркой звезды, как Полярная.

— Сайрес Смит ориентировался по звезде альфа Южного Креста.

— Совершенно верно. Немногие помнят, что альфа Южного Креста отстоит от полюса на угловом удалении примерно 27°, но Сайрес Смит это знал. Он измерил угол возвышения этой звезды над горизонтом в момент ее так называемой нижней кульминации — при прохождении ее через меридиан острова, когда Южный Крест предстал перед наблюдателем как бы вверх ногами (рис.2). Этот угол оказался равным 10°, что дает значение высоты южного полюса

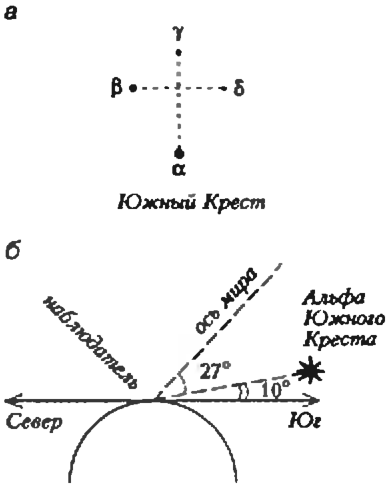


Рис.2

мира, а следовательно, и широты острова, 10° + 27° = 37°.

— Мистер Браун, но ведь Сайрес Смит производил свои наблюдения на высоком плато. Неужели поправка на высоту этого плато оказалась несущественной?

— Сайрес Смит для своих наблюдений избрал плато Кругозора лишь потому, что на близлежащем и доступном берегу моря мыс Коготь закрывал южную сторону горизонта. Жюль Верн довольно подробно описал, как инженеру удалось с помощью теоремы о подобных треугольниках оценить высоту плато Кругозора — я на этом останавливаться не буду. Напомню лишь, что высота H плато оказалась равной 100 метрам. У подножия плато горизонт другой, чем на само плато, поэтому следует рассмот-

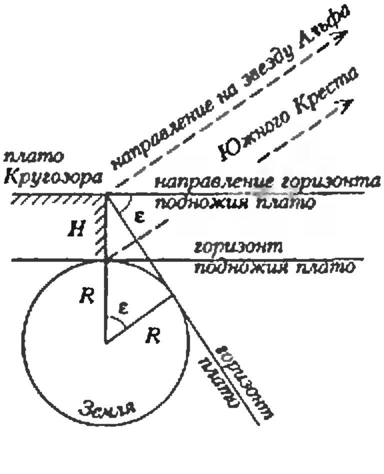


Рис.3

реть угловую поправку ε, учитывающую это отличие (рис.3). Опять же, воспользовавшись свойством углов со взаимно перпендикулярными сторонами, находим, что эта поправка равна углу между двумя земными радиусами, проведенными в точку касания с Землей горизонта плато и в точку подножия плато. Из прямоугольного треугольника с известной гипотенузой $R + H$ и катетом R находим косинус угла между ними: $\cos\varepsilon = \frac{R}{R+H}$. Поскольку величина среднего радиуса Земли равна 6371004 м, а высота плато $H = 100$ м, то отсюда $\varepsilon \approx 0{,}32°$ — поправка, действительно, несущественная.

— Но, мистер Браун, как же Сайрес Смит мог получить такое ничтожно малое значение угла ε, ведь у него же не было специальных таблиц?

— Здесь нет ничего удивительного. Таблицы ведь тоже появились не сами по себе — в свое время их кто-то составлял, а для этого проводил необходимые расчеты. Для небольших значений произвольного угла x, выраженного в радианах, существует приближенная зависимость $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. В нашем случае имеем $1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \approx \frac{R}{R+H}$, откуда $\varepsilon \approx \sqrt{\frac{2H}{R+H}} \approx 0{,}0056028$ радиана, что составляет 0,32°. Как видите, при надлежащих знаниях и умениях можно выпутаться из многих затруднительных положений.

Я хочу еще обратить ваше внимание на то, что Сайресу Смиту в его изысканиях ассистировали геометрия, астрономия, арифметика — составные части древней науки математики, как ее представляли последователи древнегреческого ученого Пифагора (VI в. до н.э.), включая в нее еще и музыку. Все эти четыре раздела пифагорейцы объединяли одним словом — математика.

Литература

1. *Жюль Верн.* Таинственный остров. — М.: Детская литература, 1980.

2. *Зигель Ф.Ю.* Сокровища звездного неба. Путеводитель по звездам и Луне. — М.: Наука, 1986.

3. *Михайлов А.А.* Земля и ее вращение. — М.: Наука, 1984. (Сер. «Библиотечка «Квант», вып. 35.)

4. *Волошинов А.В.* Пифагор: союз истины, добра и красоты. — М.: Просвещение, 1993.

ФИЗИКА 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Кому нужна высокая башня?» предназначена девятиклассникам, заметка «Кладовые энергии молекулы» — десятиклассникам, «Осцилляторы-кентавры» — одиннадцатиклассникам.

Кому нужна высокая башня?

А. СТАСЕНКО

Ну НАПРИМЕР, Галилею: «Галилей проделал опыт. Он взял пушечное ядро… и мушкетную пулю… и сбросил их с высоты 60 м. Оба тела достигли поверхности земли одновременно. Теория Аристотеля потерпела сокрушительное поражение. < В этом-то и была вся штука, но не это сейчас главное. — *А.С.* > Согласно легенде, считают, будто Галилей… использовал для этого эксперимента Пизанскую падающую башню. Башня эта, безусловно, как нельзя лучше подходит для упомянутой цели…» (Г. Линсон. Великие эксперименты в физике. М.: Мир, 1972, с.13).

Разумеется, башни строились не только для физических опытов. Прежде всего, с них далеко видно — а при отсутствии радио, телевидения и телефона это было очень важно. Из рисунка 1 можно получить дальность видимости:

$$AB = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}\,.$$

(Это — теорема Пифагора, примененная к прямоугольному треугольнику OBA; угол B — прямой, так как луч зрения есть касательная к окружности сечения Земли, принимаемой за шар.) Так как башни обычно много меньше радиуса Земли, полученную формулу можно упростить (пренебрегая малой величиной h^2):

$$AB \approx \sqrt{2Rh}\,.$$

Например, с Пизанской башни (при высоте h = 60 м и радиусе Земли R = = 6400 км) видно на расстоянии порядка 28 км, что неплохо для средневековой городской стражи. (В качестве тренировки оцените дальность видимости с Останкинской башни высотой $h \sim 300$ м.) С высоких колоколен и башен, как говорят легенды и история, пытались прыгать первые дельтапланеристы и парашютисты — увы, иногда неудачно. В наше время передающие и принимающие антенны телевидения устанавливают тоже как можно выше (аж на спутниках), потому что в этом диапазоне длин волн важна «прямая видимость».

Итак, будем делать башню все выше и выше. Вот уже ее надстроили так, что вершина переместилась из точки A в точку D (рис.2). Но тут пора вспомнить, что Земля вращается вокруг оси юг – север (*Süd – Nord*). Значит, строитель башни (а вместе с ним и его профессионально неотъемлемый отвес) находится на карусели. А как известно, если вы стоите на вращающейся платформе, крепко держась за что-нибудь, вам кажется, что на вас действует сила, направленная по радиусу наружу. Хотя при этом вы вращаетесь вместе с платформой, т.е. двигаетесь по окружности, и, следовательно, имеете ускорение, направленное к центру (центростремительное ускорение). Эта сила, стремящаяся отбросить вас к периферии, как раз и возникла из-за того, что вращающаяся система отсчета относится к большому классу так называемых неинерциальных систем. Назовем эту силу центробежной силой инерции («бежный» указывает направление от оси вращения).

Чем выше над поверхностью Земли, тем больше будет центробежная сила инерции, перпендикулярная оси вращения. И, заодно, тем меньше сила притяжения к центру Земли. Значит, с увеличением расстояния от Земли равнодействующая этих двух сил все больше будет отклоняться от направления на центр O. В результате строитель, честно следуя указаниям отвеса, построит не ровную башню CAD, направленную строго по радиусу, а «кривую» башню $CA'D'$, которая и будет самой ровной, с точки зрения строительного искусства. (Строго говоря, и стены высоких домов тоже не плоские по той же причине.)

И только на полюсах и на экваторе башни будут иметь прямую ось: в первом случае просто нет центробежной силы инерции, во втором она есть, но направлена строго вдоль самой оси. Впрочем, что значит «строго»? Ведь если с одной стороны экваториальной башни окажется гора Килиманджаро, а с другой стороны такой горы нет, то ось башни слегка искривится в сторону горы. Есть даже очень тонкая наука — гравиметрия, которая изучает такое искривление гравитационного поля и позволяет установить не только влияние гор (они и так видны), но и уплотнений внутри Земной коры (например, рудоносных пластов, что гораздо важнее).

А куда же все-таки упадет тело, если его уронить с вершины D' башни $CA'D'$? Взглянем теперь на картину «сверху», вдоль оси вращения (рис.3). Изобразим линейные скорости (с индексом φ, который означает угол поворота вокруг оси вращения SN) в нескольких точках. Величина линейной скорости, очевидно, тем больше, чем больше расстояние данной точки до оси вращения. Согласно первому закону Ньютона, падающее тело будет сохранять окружную скорость $V_{\varphi D'}$ той точки, в которой его отпустили (понятно, если мы пренебрегаем сопротивлением воздуха). Скорость подножия башни $V_{\varphi C}$ меньше, чем $V_{\varphi D'}$. Зна-

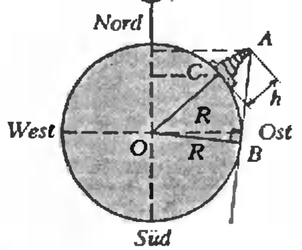


Рис. 1

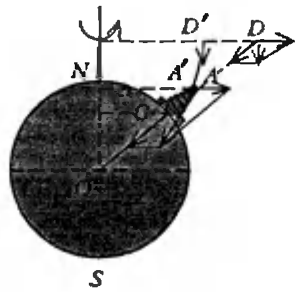


Рис. 2

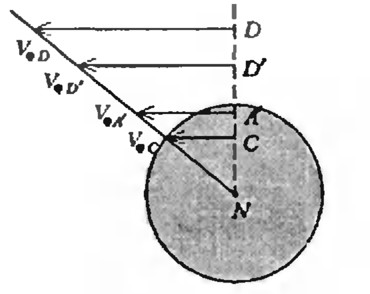


Рис. 3

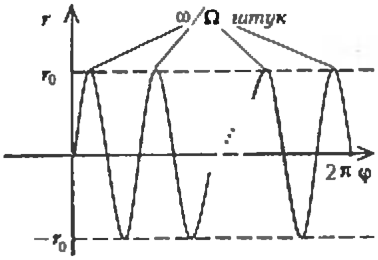


Рис. 4

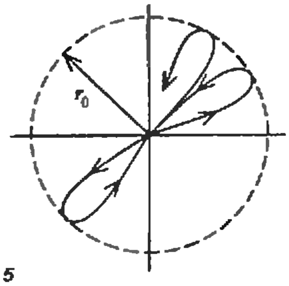


Рис. 5

чит, за время падения тело переместится на восток дальше, чем основание башни, и не упадет к подножию башни, а отклонится к направлению на восход Солнца. Кстати, этими же простыми рассуждениями можно объяснить и многие другие интересные факты. Например, почему у меридиональных рек северного полушария крутыми являются правые берега (Волга, Енисей), а в южном полушарии — левые (притоки Амазонки); можно даже и не ездить туда, чтобы убедиться в этом, а лишь хорошенько подумать.

Но, может быть, падающее тело отклонится еще и к югу под действием центробежной силы инерции? Так оно и было бы, если бы строитель сделал «ровную» (радиальную) башню, но ведь его отвес уже учел эту силу в составе равнодействующей.

Пусть мы все-таки построили «самую ровную» башню высотой h на полюсе. Зачем? Конечно, чтобы подвесить к ее вершине математический маятник длиной h. Период его колебаний, как известно, равен $2\pi\sqrt{h/g}$, а частота $\omega = \sqrt{g/h}$. Если бы Земля не вращалась, отклонение маятника от полюса происходило бы в фиксированной меридиональной плоскости и изменялось бы со временем по закону

$$r(t) = r_0 \sin \omega t$$

(r_0 — амплитуда отклонения). Но, поскольку Земля вращается с угловой скоростью Ω «под колеблющемся маятником», его движение относительно Земли будет сложным. Угол φ той меридиональной плоскости, в которой начались колебания, в системе координат, связанной с Землей, линейно растет со временем: $\varphi = \Omega t$. Поэтому получаем

$$r(\varphi) = r_0 \sin\left(\frac{\omega}{\Omega}\varphi\right).$$

Эта зависимость в декартовой системе координат r, φ изображена на рисунке 4. Ну и что тут особенного — обыкновенная синусоида, только в интервале $0 \le \varphi \le 2\pi$ уложится не одно колебание (как у функции $\sin \varphi$), а в ω/Ω раз больше (причем это число необязательно целое). А в полярной системе координат эта зависимость изображена на рисунке 5 (рисунок качественный, если можете, нарисуйте точнее, взяв конкретные значения h).

Так что, физики ради — стройте высокие башни, но, пожалуйста, не роняйте с них тяжелых предметов!

Кладовые энергии молекулы

А. СТАСЕНКО

Да неужто у молекулы, такой маленькой, могут быть еще и кладовые?! А вот есть же. Они даже специальное название имеют: *внутренние степени свободы*. Но прежде всего напомним, что такое степень свободы.

Положение в пространстве маленького тела, например атома (или материальной точки как математического предела маленького шарика), можно задать при помощи трех чисел x, y и z (рис.1, *а*). Этот атом можно переместить вдоль любой из трех осей независимо от двух других. Физики говорят, что у такого тела три степени свободы ($i = 3$). В комнатных условиях физическим образом такого шарика может служить атом благородного газа (гелия, неона, аргона, криптона, ксенона, радона).

Соединив две материальные точки жестким невесомым стержнем, получим нечто вроде гантельки (рис.1,*б*). Для полного описания ее положения в пространстве нужны уже не только три числа x, y, z (которые теперь будут характеризовать положение центра масс гантельки), но еще и два угла φ и θ (в географии они называются долготой и широтой). Итак, как говорят герои «Приключений Буратино», три плюс два — сколько? — правильно, — пять степеней свободы ($i = 5$). А можно сказать и так: поскольку шариков два, то, будь они независимы друг от друга, для описания их положения в трехмерном пространстве потребовалось бы $3 \times 2 = 6$ чисел, но у них есть одна жесткая связь, так что в этом случае $i = 3 \times 2 - 1 = 5$. Похоже, мы готовы нащупать некую общую формулу: $i = 3 \times N - S$, где N — число материальных точек, S — число связей между ними.

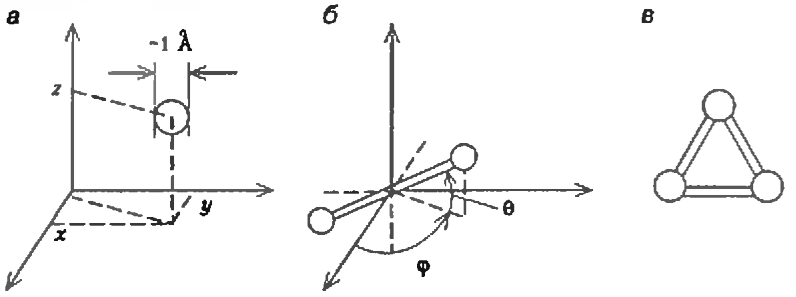


Рис. 1

Сделаем еще шаг — пусть есть три атома: $N = 3$, и они соединены тремя жесткими связями: $S = 3$ (рис.1,*в*). Тогда получим $i = 3 \times 3 - 3 = 6$. Действительно, в таком случае для описания положения этого треугольника в трехмерном пространстве нужен еще один угол — например, угол поворота плоскости треугольника относительно линии, соединяющей какую-нибудь пару атомов. Похоже, наша формула верна.

Теперь попробуем описать движение этих простых жестких молекул. Рас-

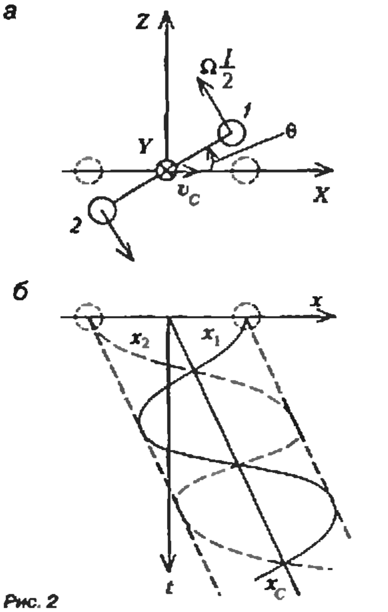


Рис. 2

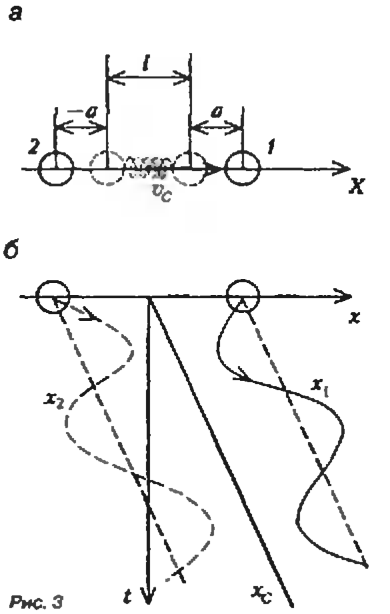


Рис. 3

смотрим, например, гантельку, центр масс которой C движется вдоль оси X со скоростью v_C, а сама гантелька длиной l вращается в плоскости XZ с постоянной угловой скоростью Ω (рис.2,*а*). Угол θ при этом пропорционален времени: $\theta = \Omega t$ (в начальный момент времени $\theta = 0$ — гантелька расположена вдоль оси X). Тогда для обоих атомов имеем

$$x_{1,2} = v_C t \pm \frac{l}{2}\cos\Omega t,$$

$$y_{1,2} = 0,$$

$$z_{1,2} = \pm\frac{l}{2}\sin\Omega t.$$

На рисунке 2,*б* показано изменение со временем только координат x обоих атомов и центра масс гантельки. Понятно, что в точках пересечения всех трех кривых гантелька расположена вдоль оси Z.

А почему гантельки обязательно жесткие? Представим себе, что два шарика (атома) массой m соединены пружинкой жесткостью K и могут скользить вдоль невесомого жесткого стержня (рис.3,*а*). В положении равновесия расстояние между ними l. Растянем пружинку так, чтобы каждый шарик отклонился от своего положения равновесия на величину $\pm a$, и отпустим. Пусть при этом центр масс гантельки движется со скоростью v_C вдоль оси X, а вращения нет. Тогда положение обоих шариков на оси X можно описать выражением

$$x_{1,2} = v_C t \pm\left(\frac{l}{2} + a\right)\cos\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{m/(2K)}$ — частота колебаний, и представить графически на рисунке 3,*б*. (А теперь вообразите, что есть еще и вращение, и попробуйте сами нарисовать суммарное движение шариков.)

В комнатных условиях молекулы основных компонентов воздуха — азота N_2 и кислорода O_2 — похожи на жесткие гантельки. Но с нагреванием газа в каждой молекуле возникают колебания атомов относительно центра масс. Говорят, что *возбуждаются* колебательные степени свободы. При дальнейшем увеличении температуры эти колебания могут стать столь интенсивными, что молекула развалится на атомы — произойдет ее *диссоциация*. Каждый образовавшийся атом-шарик (материальная точка) вновь будет иметь три степени свободы (но надо помнить, что атомов стало вдвое больше).

И еще надо помнить, что атом никакая не точка: это — многоэтажный дом, заселенный электронами, живущими в правовом обществе по законам квантовой механики. Эти электроны при столкновениях атомов могут забрасываться на верхние этажи (возбуждаются электронные степени свободы) или сбрасываться вниз, что сопровождается электромагнитным излучением. В очень важном частном случае — когда у атомов есть так называемый метастабильный уровень, на котором электроны могут «подождать» и «пожить» дольше, чем на обычном уровне, — можно создать... лазер. В лазере все электроны, как по команде, прыгают вниз, излучая мощную электромагнитную волну.

Это напоминает веселую задачу «Геофизическое «оружие» из «Физического фейерверка» (М.: Мир, 1979, с.163): «Китайская Народная Республика, возможно, обладает новым устрашающим видом оружия — геофизическим. Некоторые специалисты считают, что если все население Китая ... одновременно спрыгнет с двухметровых платформ, то в земле начнет распространяться ударная волна. Прыгая снова всякий раз, как эта волна будет проходить через Китай (каждые 53 – 54 мин), китайцы могут усилить ее до такой степени, что она может разрушить отдельные районы Соединенных Штатов, особенно в Калифорнии, нередко и сейчас страдающие от землетрясений».

Но что это мы все об электронах? Вернемся к молекулам, как было обещано в заглавии статьи. Пусть молекула из N атомов с S связями обладает числом степеней свободы i. Сюда входят три поступательные (или трансляционные) степени свободы $i_t = 3$, две или три вращательные и др. Какая нужна энергия, чтобы нагреть газ до температуры T? Вспомним, что температура связана со средней энергией (приходящейся на одну молекулу) только поступательных степеней свободы молекулы:

$$E_{ср} = \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = \frac{3}{2}kT = \frac{i_t}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана. В этой записи учтен так называемый *принцип равнораспределения* энергии по степеням свободы: на каждую поступательную степень свободы при термодинамическом равновесии приходится в среднем энергия $kT/2$. Этот принцип иногда называют теоремой, иногда законом, иногда постулатом о равнораспределении энергии по степеням свободы. Важно не название. Важно другое — что он распространяется не только на поступательные, но и на любые степени свободы молекулы. Это означает, что для нагревания до температуры T газа, молекулы которого обладают при этой температуре i степенями свободы, нужно каждую из них «накормить» энергией $kT/2$. Так что в результате потребуется в среднем, в расчете на одну молекулу, энергия

$$E_i = \frac{1}{2}ikT,$$

в расчете на один моль, содержащий число молекул, равное постоянной Авогадро N_A, —

$$E_N = E_i N_A = \frac{1}{2}ikN_A T = \frac{1}{2}iRT,$$

где R — универсальная газовая постоянная, в расчете на один килограмм —

$$E = \frac{E_N}{M} = \frac{1}{2}i\frac{R}{M}T,$$

где М — молярная масса. Напомним, что множитель при T называется среднемолекулярной, молярной или удельной теплоемкостью соответственно.

Вернемся к колебательному движению молекул. Сколько степеней свободы соответствуют колебаниям вдоль одной линии? Оказывается, две: нужно знать не только положение относительно равновесия, но и скорость. С точки зрения энергии: одинаковый вклад $(kT/2)$ дает как средняя кинетическая энергия атомов, так и средняя потенциальная энергия их взаимодействия. Таким образом, если для жесткой гантельки $i = 5$, то в случае замены жесткого стерженька одномерной пружинкой $i = 7$.

А почему, — спросит вдумчивый читатель, — для описания, например, вращательного движения вокруг одной оси достаточно одной степени свободы? Ведь можно было бы потребовать задать и угол, и угловую скорость?!

Да, так оно и было бы, если бы мы на ось жесткой вращающейся молекулы-гантельки надели спиральную пружинку (рис.4). Тогда при ее закручивании на

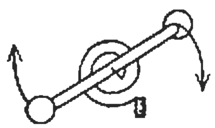


Рис. 4

некоторый угол появилась бы, помимо кинетической энергии шариков гантельки, еще и потенциальная энергия закрученной пружинки. Так что для достижения термодинамического равновесия пришлось бы «отвесить» не только $kT/2$ на среднюю кинетическую энергию молекулы, но и еще $kT/2$ на среднюю потенциальную энергию. А пока этой спиральной пружинки нет, одна вращательная степень свободы удовлетворяется одним $kT/2$.

Кстати, стрелки многих измерительных приборов как раз и похожи на то, что показано на рисунке 4. Они могут вращаться вокруг оси, а к положению равновесия их возвращает пружинка. Чем легче стрелка, тем чувствительнее прибор, что есть хорошо. Но если массу стрелки сделать близкой к массе молекул окружающей среды, то под действием ударов этих молекул прибор перестанет «работать»: стрелка будет участвовать в хаотическом тепловом движении. Это и будет тепловой предел измерений.

Строго говоря, любой предмет — стол, паровоз — находится в состоянии хаотического движения, точнее, центр масс этого предмета мечется во все стороны, согласно закону равнораспределения. Среднеквадратичная поступательная скорость v этого движения найдется из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

но так как масса тела велика, то скорость этого хаотического метания очень мала (оцените сами). Поэтому паровозы и не сходят с рельсов из-за теплового движения, а столы стоят на месте почти неподвижно.

Но мы не напрасно сказали выше слова «молекулы которого обладают при данной температуре i степенями свободы». Они подчеркивают, что при рассматриваемой температуре могут быть «включены» не все степени свободы молекулы. Так, при низких температурах молекулы летают как точки-шарики: их средняя энергия равна $3kT/2$, «включены» только 3 трансляционные степени свободы, а остальные $i - 3$ степени свободы — кладовые, закрытые для насыщения их энергией. Молекулы при этом не только не колеблются, но и не вращаются, даже если они похожи на гантельки.

Это — чисто квантово-механический эффект (о чем принято вспомнить на страницах «Кванта»). Оказывается, даже вращательная энергия квантуется: она не может быть меньше некоторой порции. Поэтому, если температура низка, эта минимальная порция еще не обеспечена, и вращения нет. Например, для молекулярного водорода H_2 вращение включается при $T \sim 100$ К, при $T \sim 1000$ К включаются колебания и т.д., так что температурные зависимости числа степеней свободы и энергии имеют вид ломаных (рис.5). Конечно, в реальности эти изломы сглажены за счет разброса, или распределения, молекул по скоростям — см. штриховые линии на рисунке.

Но нужны ли нам все эти степени свободы молекул? Очень даже нужны — и не только из любви к свободе. Ведь мы нагреваем газ и наполняем кладовые энергии молекул теплотой не бесцельно: мы собираемся потом получить от газа работу (в паровой машине, двигателе внутреннего сгорания) или импульс (когда выбрасываем газ из сопла ракеты). И вот тут-то есть надежда, что газ вернет нам в виде желанного полезного эффекта тем больше «проглоченной» тепловой энергии, чем больше степеней свободы у его молекул. Увы, только надежда. Оказывается, в процессе расширения, т.е. совершения работы, начинает сказываться тот факт, что для достижения термодинамически равновесного состояния при изменяющейся со временем температуре $T(t)$ для разных степеней свободы нужно

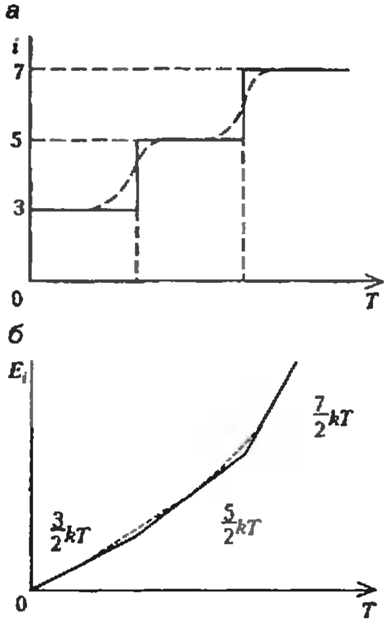


Рис. 5

неодинаковое число *столкновений* молекул друг с другом (а иначе — не сталкиваясь — как они узнают, что существуют другие молекулы и что температура газа-хаоса изменяется?). Больше всего столкновений требуется для колебательных степеней свободы. Поэтому газ может так быстро проскочить, например, сопло ракеты, охлаждаясь при этом и ускоряясь (мы и стремимся его разогнать как можно быстрее), что не все внутренние степени свободы успеют отдать свою энергию. В результате ускоренный газ, выброшенный в космос, будет холодным с точки зрения поступательных степеней свободы, но горячим с точки зрения внутренних степеней: из-за сильного разрежения молекулы почти перестанут сталкиваться, а их атомы будут яростно колебаться, храня память о высокой температуре где-то внутри двигателя. Возникает многотемпературная термодинамически неравновесная среда, в которой

$$T_{колеб} \neq T_{вращ} \neq T.$$

Это одна из интереснейших и важнейших задач физической газодинамики, которую можно изучить, например, на факультете аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института. Чего вам и желаем.

Осцилляторы-кентавры

Б. РЫБИН

ЧЕЛОВЕК давно мечтал о создании новых живых организмов на основе имеющихся в природе. Сначала это делалось на уровне фантазии — вспомните, скажем, человека-амфибию из романа А.Р.Беляева или кентавров из мифов Древней Греции. В настоящее время проблема постепенно переходит в практическую плоскость. Например, когда речь идет о пересадке органов от одного живого организма к другому. При этом оказалось, что при соединении частей от разных, пусть даже родственных, организмов возникает проблема несовместимости, и требуется преодолеть значительные трудности, чтобы вновь созданный организм оказался жизнеспособным.

Нечто похожее можно наблюдать и в физике. Существует два основных класса колебательных систем — механические и электрические. В качестве типичного примера механического осциллятора можно рассмотреть пружинный маятник, а электрического — электрический колебательный контур.

Попробуем создать осциллятор-кентавр, состоящий из конденсатора и пружины (назовем его Ck-осциллятор). На рисунке 1 представлена его принципиальная схема. В электрическую цепь

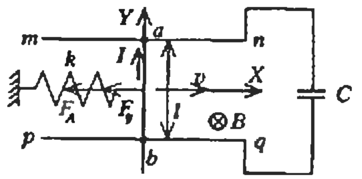


Рис. 1

конденсатора емкостью C входит проводник ab длиной l, который может свободно двигаться без трения вдоль неподвижных проводников mn и pq, сохраняя с ними электрический контакт. Проводник ab находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной перпендикулярно плоскости рисунка (от читателя). К нему прикреплена пружина жесткостью k. Будем считать, что массы всех движущихся частей пренебрежимо малы, а сопротивление в цепи конденсатора равно нулю.

При движении проводника ab вдоль mn и pq со скоростью v на его концах возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = Blv.$$

Поскольку сопротивление в цепи конденсатора отсутствует, ЭДС индукции должна равняться разности потенциалов на обкладках конденсатора:

$$\frac{q}{C} = Blv, \qquad (1)$$

где q — заряд конденсатора. С другой стороны, если по ab идет ток I (обусловленный силой Лоренца), то на проводник со стороны магнитного поля действует сила Ампера, равная

$$F_A = -BIl$$

(знак «минус» определяется правилом левой руки). Учитывая также силу упругости $F_y = -kx$ со стороны пружины, второй закон Ньютона для ab запишем в виде

$$ma = -BIl - kx.$$

По предположению $m = 0$, т.е.

$$BIl = -kx. \qquad (2)$$

Продифференцируем левую и правую части уравнения (1) по времени:

$$\frac{1}{C} q' = Blv'. \qquad (3)$$

Так как $q' = I$, а $v' = x''$, из (2) и (3) получаем

$$x'' + \frac{k}{C(Bl)^2} x = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний нашего Ck-осциллятора, частота которых равна

$$\omega_{Ck} = \frac{1}{Bl}\sqrt{\frac{k}{C}}.$$

Рассмотрим еще один осциллятор-кентавр, состоящий из катушки индуктивностью L и груза массой M, связанного с проводником, движущимся в магнитном поле (рис.2). Легко убедиться, что

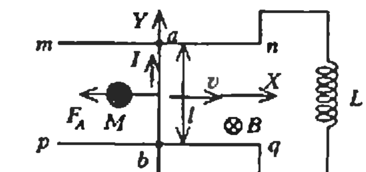


Рис. 2

в этом случае для электрической цепи уравнение принимает вид $LI' = Blv$, а второй закон Ньютона для груза —

$$Mx'' = -BIl.$$

Отсюда получаем

$$I'' + \frac{(Bl)^2}{ML} I = 0,$$

т.е. частота LM-осциллятора равна

$$\omega_{LM} = \frac{Bl}{\sqrt{ML}}.$$

В осцилляторах-кентаврах могут наблюдаться те же виды колебаний, что и в чисто механических или чисто электрических колебательных системах. Например, если, предварительно зарядив конденсатор (или растянув пружину), предоставить Ck-осциллятор самому себе, то в нем возникнут свободные колебания. Если же в цепь конденсатора включить ЭДС, изменяющуюся по гармоническому закону (или приложить к ab гармоническую силу), то возникнут вынужденные колебания.

Оценим величины ω_{Ck} и ω_{LM}. Для этого выберем практически разумные значения для соответствующих параметров. Пусть, например, $B = 10^{-2}$ Тл, $l = 0{,}1$ м, $C = 10^{-4}$ Ф, $k = 1$ Н/м, $L = 10^{-2}$ Гн, $M = 10^{-2}$ кг. Тогда $\omega_{Ck} = 10^5$ с$^{-1}$ и $\omega_{LM} = 10^{-1}$ с$^{-1}$. Понятно, что 10^5 с$^{-1}$ — неприемлемая частота для колебаний пружины. С другой стороны, 10^{-1} с$^{-1}$ — малое значение для частоты тока, текущего по соленоиду. Очевидно, мы имеем дело с несовместимостью электрических и механических частей. Чтобы преодолеть эту несовместимость, необходимо определенное искусство (на рисунках 1 и 2 представлены не действующие установки, а принципиальные схемы, выражающие общую идею). В частности, необходимо увеличивать C и уменьшать k в Ck-осцилляторе, уменьшать L и M в LM-осцилляторе. В обоих случаях необходимо увеличивать Bl и уменьшать сопротивления — электрическое и механическое. Например, для увеличения длины l проводника ab можно изготовить его в виде катушки, совершающей крутильные колебания в магнитном поле, т.е. в качестве Ck-осциллятора использовать высокочувствительный зеркальный гальванометр, к выходу которого подсоединить конденсатор с большой емкостью.

Если в вашем школьном физическом кабинете имеется зеркальный гальванометр, то вы можете провести такой опыт. Подсоедините ко входу гальванометра фотоэлемент. При освещении фотоэлемента световой указатель гальванометра отклонится и покажет наличие в цепи тока. После выключения осветителя фотоэлемента начнутся свободные колебания рамки гальванометра. По движению светового указателя определите период крутильных колебаний рамки. Повторите опыт, предварительно подсоединив ко входу гальванометра параллельно фотоэлементу конденсатор большой емкости ($5 \cdot 10^2 - 10^3$ мкФ). Если период колебаний рамки при этом значительно увеличится, то это будет означать, что вы наблюдаете электромеханические колебания Ck-осциллятора.

Диагонали правильного 18-угольника

В.ПРАСОЛОВ

ПОЧТИ во всех геометрических теоремах речь идет о достаточно широком классе фигур. Если даже теорема относится не к любому треугольнику, то, по крайней мере, к прямоугольному треугольнику. На этом фоне резко выделяются задачи, относящиеся к треугольникам с вполне конкретными углами, причем эти углы используются вовсе не для того, чтобы подставить их в какую-то общую для всех треугольников формулу. Вот два примера таких задач:

1. *В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 80°. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MBC = 30°$ и $\angle MCB = 10°$. Докажите, что $\angle AMC = 70°$.*

2. *В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°. На сторонах BC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60°$ и $\angle ECA = 50°$. Докажите, что $\angle ADE = 30°$.*

Эти задачи не простые; прямым вычислениям они не поддаются. Их решения обычно используют замысловатые дополнительные построения. Такие решения оставляют ощущение неудовлетворенности. Сомневаться в их правильности нет оснований, но совершенно непонятно, откуда они берутся.

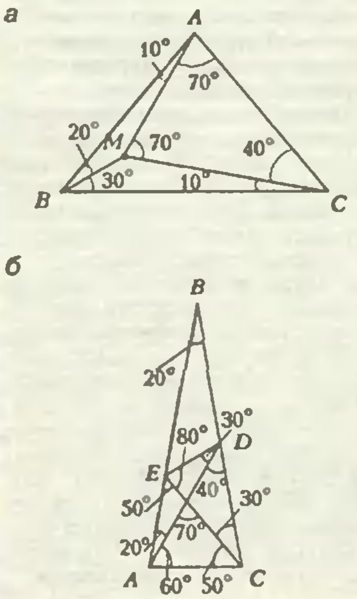


Рис.1

Попробуем, однако, сформулировать обе задачи одинаковым образом. На рисунке 1 изображены треугольники, о которых идет речь. Из этого рисунка можно понять, что задача 1 эквивалентна следующему утверждению: в правильном 18-угольнике диагонали A_1A_{13}, A_3A_{14} и A_6A_{15} пересекаются в одной точке (рис.2). В самом деле, если эти диагонали пересекаются в одной точке, то

$$\angle A_1MA_6 = \frac{1}{2}\left(\cup A_1A_6 + \cup A_{13}A_{15}\right) = 50° + 20° = 70°.$$

Задача 2 эквивалентна такому утверждению: *в правильном 18-угольнике диагонали A_1A_{11}, A_7A_{16} и $A_{11}A_{17}$ пересекаются в одной точке* (рис.3).

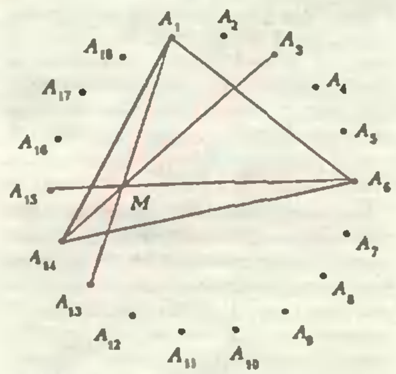


Рис.2

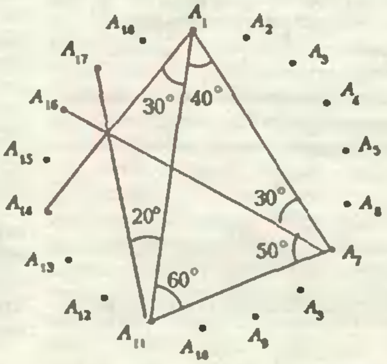


Рис.3

Тройки диагоналей получились совсем разные, поэтому задачи, казалось бы, независимые. Так ли это? Нет, это вовсе не так. Задачу 2 очень легко решить, если воспользоваться тем, что первая тройка диагоналей пересекается в одной точке. Обратимся для этого к рисунку 4. Диагонали A_1A_{13} и A_9A_{15} симметричны относительно диаметра A_5A_{14}, поэтому точка их пересечения лежит на нем. Значит, утверждение задачи 1 для треугольника $OA_{14}A_{15}$ заключается в том, что угол между диагоналями A_1A_{13} и A_3A_{14} равен 30°. Но этот угол легко вычисляется: он равен $\left(\cup A_1A_3 + \cup A_{13}A_{14}\right)/2 = 20° + 10°$. Совсем разные точки пересечения диагоналей оказались странным образом связаны друг с другом.

Взаимосвязей между точками пересечения троек диагоналей очень много, особенно если рассматривать еще и точки пересечения продолжений диагоналей. Например, тройку пересекающихся диагоналей, изображенную на рисунке 2, мы получили, рассмотрев описанную окружность треугольника ABC (рис.1,*а*). Но ведь мы можем рассмотреть и описанные окружности треугольников ABM, BCM и CAM. В этих случаях мы, правда, получим не точки пересечения диагоналей, а точки пересечения продолжений диагоналей, но все они разные. Есть еще один способ получать по тройке пересекающихся диагоналей другие тройки. Но нам уже пора научиться доказывать, что все тройки диагоналей, о которых шла речь, действительно пересекаются в одной точке.

Проверять, пересекаются ли тройки диагоналей в одной точке, очень удобно с помощью следующего утверждения.

Теорема. *На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 (A_1 на BC и т.д.). Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только*

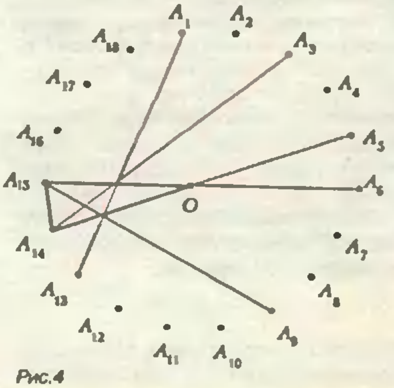


Рис.4

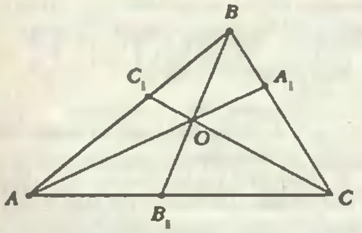


Рис.5

тогда, когда

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1}\cdot\frac{\sin ACC_1}{\sin BCC_1}\cdot\frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1}=1.$$

Доказательство. Предположим сначала, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O (рис.5). Тогда

$$2S_{AOB}:2S_{AOC}=$$
$$=(AB\cdot AO\sin BAO):(AC\cdot AO\sin CAO).$$

Следовательно,

$$1=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\cdot\frac{S_{COA}}{S_{COB}}\cdot\frac{S_{BOC}}{S_{BOA}}=$$
$$=\left(\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CA}{CB}\cdot\frac{BC}{BA}\right)\times$$
$$\times\frac{\sin BAO}{\sin CAO}\cdot\frac{\sin ACO}{\sin BCO}\cdot\frac{\sin CBO}{\sin ABO}.$$

Предположим теперь, что для точек A_1, B_1 и C_1 выполняется указанное соотношение. Пусть O — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Нужно доказать, что отрезок CC_1 проходит через точку O. Иными словами, если C_1' — точка пересечения прямых CO и AB, то $C_1'=C_1$. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1' пересекаются в одной точке, поэтому, как только что было доказано,

$$\frac{\sin BAA_1}{\sin CAA_1}\cdot\frac{\sin CBB_1}{\sin ABB_1}\cdot\frac{\sin ACC_1'}{\sin BCC_1'}=1.$$

Сравнив эту формулу с условием теоремы, получим

$$\sin ACC_1:\ \sin BCC_1=$$
$$=\sin ACC_1':\ \sin BCC_1'.$$

Остается доказать, что при движении точки X по отрезку AB величина $\sin ACX:\sin BCX$ изменяется монотонно. Сами углы ACX и BCX изменяются монотонно, но их синусы могут не быть монотонными для тупого угла C. Это не беда. В любом треугольнике есть острый угол, и мы с самого начала могли бы взять в качестве угла C острый угол. Доказательство теоремы завершено.

Теперь проверка того, что тройка диагоналей, изображенная на рисунке 2, пересекается в одной точке, сводится к проверке тождества

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ}=1.$$

Доказать его несложно:

$$\sin 30^\circ\sin 40^\circ=\frac{1}{2}\sin 40^\circ=$$
$$=\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\sin 20^\circ\sin 70^\circ.$$

Тройка диагоналей, изображенная на рисунке 3, соответствует тождеству

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 20^\circ=\sin 30^\circ\sin 60^\circ\sin 10^\circ.$$

Есть еще три тождества, приводящие к тройкам пересекающихся диагоналей:

$$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 80^\circ=\sin 20^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ,$$
$$\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 30^\circ=\sin 10^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ,$$
$$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ=\sin 10^\circ\sin 10^\circ\sin 100^\circ.$$

Проверку этих тождеств мы оставляем читателю.

От перестановки сомножителей произведение не изменяется. Все мы так к этому привыкли, что даже не ожидаем извлечь из этого что-либо содержательное. Но, изменяя в наших тождествах порядок сомножителей, мы изменяем порядок дуг и получаем совсем другие тройки диагоналей! Это и есть обещанный способ получения новых троек пересекающихся диагоналей.

Наш интерес к 18-угольнику, а не к какому-либо другому n-угольнику, связан с тем, что именно к нему приводят треугольники с углами, кратными 10°. По счастливой случайности у него оказался обильный набор троек пересекающихся диагоналей. Среди всех правильных многоугольников, число вершин которых меньше 18, интересные наборы пересекающихся диагоналей есть у 12-угольника. Например, диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} правильного 12-угольника пересекаются в одной точке (рис.6). Это утверждение эквивалентно следующей хорошо известной задаче.

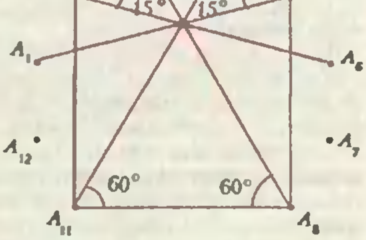


Рис.6

3. *Внутри квадрата ABCD взята точка P так, что треугольник ABP равносторонний. Докажите, что* $\angle PCD=15^\circ$.

Чтобы у читателя не сложилось мнение, будто с пересечением троек диагоналей связаны лишь разобранные выше задачи, а другие задачи такого рода этим способом решить нельзя, разберем еще два примера. В обоих случаях рассматривается треугольник ABC с углами $\angle A=50^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=70^\circ$.

4. *На сторонах BA и AC взяты точки D и E так, что* $\angle DCB=\angle EBC=40^\circ$. *Тогда* $\angle BED=30^\circ$.

5. *На сторонах BA и BC взяты точки D и E так, что* $\angle DCA=50^\circ$ *и* $\angle EAC=40^\circ$. *Тогда* $\angle AED=30^\circ$.

Эти утверждения легко доказать, воспользовавшись рисунками 7 и 8.

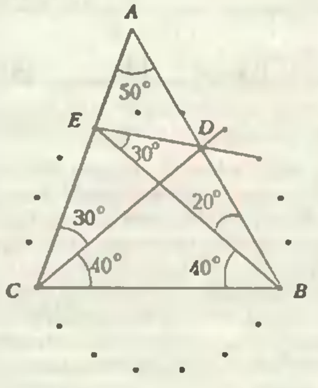


Рис.7

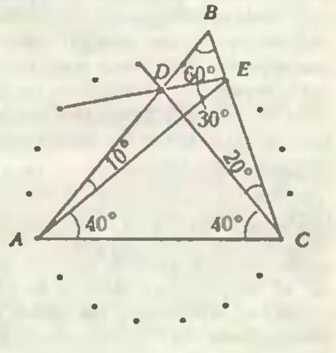


Рис.8

Задачи о треугольниках, связанные с углами, кратными 10°, можно решить как геометрически, так и с помощью троек пересекающихся диагоналей правильного 18-угольника, т.е., по сути дела, тригонометрически. По крайней мере, это справедливо для всех задач, известных автору статьи. Что же касается задач о треугольниках, связанных с углами, кратными 1°, то для одной из них известно лишь тригонометрическое решение. Читатель может попытаться найти геометрическое доказательство этого утверждения.

6. В треугольнике ABC углы A, B и C равны 14°, 62° и 104°. На сторонах AC и AB взяты точки D и E соответственно так, что ∠DBC = 50° и ∠ECB = 94°. Тогда ∠CED = 34° (рис.9).

Тригонометрическое доказательство этого утверждения сводится к проверке тождества

$$\sin 10° \sin 16° \sin 24° = \sin 2° \sin 34° \sin 94°.$$

Наборы пересекающихся диагоналей правильных многоугольников были одной из тем, обсуждавшихся на летней конференции математического Турнира городов (Челябинск, июль 1991 г.).

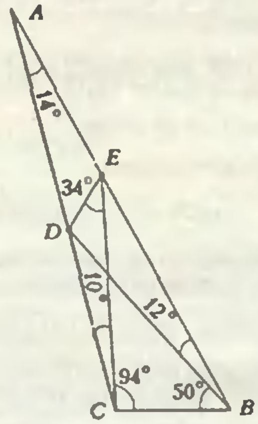


Рис.9

Упражнения

1. Докажите, что диагонали A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ правильного $2n$-угольника пересекаются в одной точке.

2. Докажите, что диагонали A_1A_7, A_3A_{11} и A_5A_{21} правильного 24-угольника пересекаются в точке, лежащей на оси симметрии A_4A_{16}.

3. Докажите, что диагонали A_1A_7, A_2A_9 и A_4A_{17} правильного 30-угольника пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что в правильном 36-угольнике семь диагоналей A_1A_{13}, A_2A_{17}, A_3A_{21}, A_4A_{24}, A_5A_{26}, A_8A_{29} и $A_{10}A_{30}$ пересекаются в одной точке.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

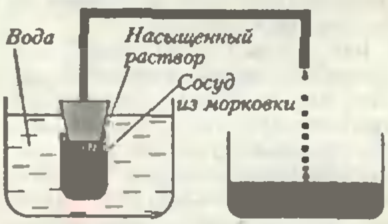
Осмос и... вечный двигатель

Н. ПАРАВЯН

ПРЕДСТАВЬТЕ себе, что некоторый раствор отделен от своего растворителя полупроницаемой перегородкой – она пропускает маленькие молекулы растворителя, но задерживает более крупные молекулы растворенного вещества. Очевидно, что из-за естественного стремления к выравниванию концентрации по всему объему будет происходить односторонняя диффузия молекул растворителя. Такой самопроизвольный переход растворителя в раствор, отделенный от него полупроницаемой перегородкой, называют осмосом. Говорят также, что растворитель проникает в раствор под действием сил осмотического давления. Другими словами, осмотическое давление служит количественной характеристикой явления осмоса.

Осмотическое давление можно измерить – оно равно избыточному давлению, которое нужно приложить со стороны раствора, чтобы осмос прекратился. И экспериментально, и на основе молекулярной теории растворов было установлено, что осмотическое давление пропорционально концентрации раствора и абсолютной температуре. Было бы интересно проверить это, но как? Ведь для экспериментов нужен специальный прибор – осмометр, которого нет в школьном физическом кабинете.

Однако выход есть: надо изготовить самодельный осмометр. Возьмите самую обыкновенную морковку длиной 10 – 12 сантиметров и диаметром 3 – 4 сантиметра. Тщательно вымойте ее, поскоблите и аккуратно обрежьте хвостик и верхушку. С помощью сверла для пробок (его можно позаимствовать на время из химического кабинета) аккуратно высверлите из морковки серединку так, чтобы



толщина стенок образовавшегося «стаканчика» составила 3 – 8 миллиметров. Если нет пробочного сверла – не беда: скальпелем или узким (например, перочинным) ножиком вырежьте серединку из морковки. Вместо морковки можно использовать свеклу, репу, брюкву, картофель – все, что окажется под рукой. Теперь подберите к такому сосуду резиновую пробку с отводной стеклянной или полиэтиленовой трубкой. В принципе, наш осмометр готов (см. рисунок), и можно начинать эксперименты.

Налейте в сосуд до краев насыщенный раствор любого вещества, растворимого в воде (поваренной соли, аптечного сульфата натрия – глауберовой соли, сахара, если не жалко для науки), и плотно закройте пробкой с отводной трубкой. Обязательно проследите, чтобы под пробку не попали пузырьки воздуха, иначе этот воздух окажет серьезное «противодействие» осмосу. Наполненный сосуд поместите в стакан с водопроводной водой, а чтобы не держать его в руках, с помощью лапки присоедините прибор (за пробку) к металлическому лабораторному штативу. Обратите внимание на то, чтобы уровень воды в стакане был выше уровня раствора в морковном цилиндрике.

Уже через несколько минут из отводной трубки в заранее подставленный пустой сосуд вследствие осмоса начнет выливаться жидкость. А примерно через 30 – 40 минут уровень воды в наружном стакане заметно понизится. Интересно, долго ли это может продолжаться? На первый взгляд, никаких ограничений нет – ведь в наружный стакан можно все время подливать чистую воду. Но это – только на первый взгляд. На самом деле этот опыт, как бы долго он ни продолжался, все-таки закончится, и вот почему. Вода будет просачиваться через полупроницаемую перегородку (стенки морковного «стаканчика») в наш осмометр, но при этом концентрация раствора в нем будет постепенно уменьшаться. Кроме того, вытекание жидкости из осмометра тоже понижает концентрацию растворенных в нем веществ (концентрированный раствор уходит – чистая вода приходит). Так что когда концентрации растворенных веществ во внешнем стакане и внутри морковного сосуда сравняются, жидкость перестанет вытекать из нашего прибора и опыт прекратится.

Заметим, что в такой постановке опыт может продолжаться довольно долго (2 – 3 часа) – если, конечно, у вас хватит терпения все время подливать чистую воду в наружный стакан осмометра. Однако процесс все-таки закончится. Так что вечный двигатель на явлении осмоса не построить.

Ядерная физика в задачах

Ю.САМАРСКИЙ

ВСПОМНИМ некоторые определения, явления и закономерности ядерной физики.

Когда говорят о ядре, то подразумевают центральную часть атома, в которой сосредоточена практически вся масса атома и его положительный заряд. Атомное ядро любого элемента состоит из протонов (числом Z) и нейтронов (числом N), называемых *нуклонами*. Заряд ядра равен величине Ze, где Z — порядковый номер химического элемента в таблице Менделеева, соответствующий числу протонов в ядре, а e — заряд протона, равный по абсолютной величине заряду электрона. Число нуклонов в ядре $A = Z + N$ называют *массовым числом*. Отдельному протону и нейтрону приписывается массовое число, равное единице, а электрону — равное нулю. Массу ядер и элементарных частиц принято выражать в особых единицах — атомных единицах массы: 1 а.е.м. $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ядра с одинаковыми Z, но различными A, т.е. ядра с разным числом нейтронов $N = A - Z$, называются *изотопами*. Ядро химического элемента обозначается ${}^A_Z X$, где X — символ этого элемента.

Некоторые тяжелые ядра (изотопы урана, тория, радия) самопроизвольно распадаются с образованием новых ядер и выделением α-частиц, β-частиц и γ-квантов. Это свойство называется *естественной радиоактивностью*. Существует также *искусственная радиоактивность* изотопов, которая возникает в результате ядерных реакций. Изменение числа радиоактивных ядер подчиняется закону радиоактивного распада

$$N = N_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где N_0 — число ядер в момент времени $t = 0$, N — оставшееся число радиоактивных ядер в момент времени t, T — период полураспада (время, в течение которого распадается половина ядер). При этом радиоактивный распад не связан с такими внешними условиями, как температура или давление.

Нуклоны в ядрах находятся в состояниях, существенно отличающихся от их свободных состояний. Как показывают измерения, масса покоя ядра *всегда меньше* суммарной массы нуклонов, составляющих ядро. Разность масс Δm между массой покоя свободных нуклонов и массой покоя ядра называют *дефектом масс*:

$$\Delta m = \left(Zm_p + Nm_n\right) - M_я.$$

Согласно соотношению Эйнштейна для энергии тела и его массы, дефект масс определяет *энергию связи* ядра:

$$\Delta E = \Delta mc^2.$$

Энергия связи ядра — эта та работа, которую нужно совершить, чтобы расщепить ядро на составляющие его нуклоны, не сообщая им кинетической энергии. Из закона сохранения энергии следует, что при образовании ядра должна выделяться такая же энергия.

Взаимодействие атомного ядра с другим ядром или с элементарной частицей, при котором происходит превращение ядер, называют *ядерной реакцией*. При ядерных реакциях выполняются законы сохранения энергии, импульса, электрического заряда, числа нуклонов.

Характерно, что одни ядерные реакции идут с поглощением энергии, а другие — с ее выделением. Если известно, например, что в результате реакции выделяется энергия ΔE, связанная с дефектом масс, то выделяется она в виде кинетической энергии продуктов реакции. Если же суммарная масса ядер после реакции больше, чем до нее, то реакция обязательно идет с поглощением энергии. Так происходит, скажем, при соударении налетающей частицы с покоящимся ядром. Заметим, что при этом энергия частицы не может равняться поглощаемой энергии ΔE, а должна быть обязательно больше. Действительно, импульс и кинетическая энергия системы (частица — ядро) до реакции не равны нулю, следовательно, и после реакции они также не равны нулю. Минимальная кинетическая энергия системы после реакции должна равняться кинетической энергии центра масс. Таким образом, существует так называемая *пороговая энергия* налетающей частицы, при которой может идти реакция. Эта энергия равна сумме энергии реакции и энергии движения центра масс данной системы:

$$E_п = \Delta E + E_{ц.м}.$$

А теперь обратимся к решению конкретных задач.

Задача 1. *Образовавшееся в результате ядерной реакции неподвижное ядро изотопа калия ${}^{40}_{19}K$ испускает γ-квант с энергией $E_\gamma = 9{,}4$ кэВ. Определите кинетическую энергию ядра после испускания кванта. Одной атомной единице массы соответствует энергия 931,5 МэВ.*

По условию задана энергия γ-кванта, следовательно, задан и его импульс:

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c},$$

где c — скорость света. Система «ядро — квант» является замкнутой. В соответствии с законом сохранения импульса,

$$M_я v = \frac{E_\gamma}{c},$$

где $M_я$ — масса ядра калия, определяемая массовым числом $A = 40$. Отсюда находим скорость ядра:

$$v = \frac{E_\gamma}{M_я c}$$

и его кинетическую энергию:

$$E_k = \frac{M_я v^2}{2} = \frac{E_\gamma^2}{2M_я c^2} =$$

$$= \frac{\left(9{,}4 \cdot 10^3\right)^2}{2 \cdot 40 \cdot 931{,}5 \cdot 10^6}\ эВ \approx 10^{-3}\ эВ.$$

Задача 2. *Термоядерная реакция ${}^2_1H + {}^3_2He \to {}^4_2He + {}^1_1p$ идет с выделением энергии $E_1 = 18{,}4$ МэВ (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину E_1 больше кинетической энергии исходных). Какая энергия E_2 выделится в реакции ${}^3_2He + {}^3_2He \to {}^4_2He + 2{}^1_1p$, если дефект масс ядра ${}^3_2He$ на $\Delta m = 0{,}006$ а.е.м. больше, чем у ядра ${}^2_1H$?*

Выражая массы ядер, входящих в реакцию, через дефект масс и массы свободных нуклонов, напишем закон сохранения энергии для первой реакции:

$$\left(m_p + m_n - \Delta m_{{}^2_1H}\right) + \left(2m_p + m_n - \Delta m_{{}^3_2He}\right) =$$

$$= M_{{}^4_2He} + m_p + \frac{E_1}{c^2}.$$

Аналогично для второй реакции:

$$2\left(2m_p+m_n-\Delta m_{^3_1\mathrm{He}}\right)=M_{^4_2\mathrm{He}}+2m_p+\frac{E_2}{c^2}.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$-\Delta m_{^3_1\mathrm{H}}+\Delta m_{^3_2\mathrm{He}}=\Delta m=\frac{E_1-E_2}{c^2}.$$

Отсюда энергия, выделившаяся во второй реакции, будет равна

$$E_2=E_1-\Delta mc^2=$$

$$=18{,}4\ \text{МэВ}-0{,}006\cdot 931{,}5\ \text{МэВ}=$$

$$=12{,}8\ \text{МэВ}.$$

Задача 3. *При слиянии протона ($^1_1$H) и ядра трития ($^3_1$H) образуется α-частица ($^4_2$He) и γ-квант: $^1_1\mathrm{H}+^3_1\mathrm{H}\to{}^4_2\mathrm{He}+\gamma$. Определите, какую энергию уносит γ-квант в этой реакции, если кинетическими энергиями ядер $^1_1$H, $^3_1$H и $^4_2$He в ней можно пренебречь. Известно, что дефект масс ядра $^4_2$He составляет $\Delta m_\alpha=0{,}0304$ а.е.м., а кинетическая энергия частиц, образующихся в реакции $^3_1\mathrm{H}+^3_1\mathrm{H}\to{}^4_2\mathrm{He}+2^1_0n$, на величину $E=11{,}3$ МэВ больше кинетической энергии исходных частиц.*

Аналогично предыдущей задаче, напишем закон сохранения энергии для первой реакции:

$$m_p+\left(m_p+2m_n-\Delta m_{^3_1\mathrm{H}}\right)=$$
$$=\left(2m_p+2m_n-\Delta m_\alpha\right)+\frac{E_\gamma}{c^2},$$

или

$$-\Delta m_{^3_1\mathrm{H}}=-\Delta m_\alpha+\frac{E_\gamma}{c^2}.$$

Так же для второй реакции:

$$2\left(m_p+2m_n-\Delta m_{^3_1\mathrm{H}}\right)=$$
$$=\left(2m_p+2m_n-\Delta m_\alpha\right)+2m_n+\frac{E}{c^2},$$

или

$$-2\Delta m_{^3_1\mathrm{H}}=-\Delta m_\alpha+\frac{E}{c^2}.$$

Исключая из уравнений $\Delta m_{^3_1\mathrm{H}}$, получим

$$E_\gamma=\frac{E+\Delta m_\alpha c^2}{2}=19{,}8\ \text{МэВ}.$$

Задача 4. *Ядра дейтерия D($^2_1$H) и трития T($^3_1$H) могут вступать в реакцию $\mathrm{D}+\mathrm{T}\to{}^4_2\mathrm{He}+^1_0n$, в результате которой образуются нейтрон и α-частица ($^4_2$He). При каждой такой реакции выделяется энергия $E=17{,}6$ МэВ. Определите, какую энергию уносит нейтрон и какую α-частица. Кинетические энергии, которыми обладали ядра до реакции, пренебрежимо малы.*

Поскольку до реакции импульс и энергия системы были равны нулю, образующиеся в результате реакции частицы разлетаются в противоположные стороны с одинаковыми по величине импульсами (закон сохранения импульса):

$$p_n=\sqrt{2m_nE_n}=p_\alpha=\sqrt{2m_\alpha E_\alpha}.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$E=E_n+E_\alpha.$$

Решая совместно эти уравнения, получим

$$E_\alpha=\frac{m_n}{m_\alpha+m_n}E=3{,}5\ \text{МэВ},$$

$$E_n=\frac{m_\alpha}{m_\alpha+m_n}E\approx 14{,}1\ \text{МэВ}.$$

Задача 5. *Ядерная реакция $^{14}_7\mathrm{N}+^4_2\mathrm{He}\to{}^{17}_8\mathrm{O}+^1_1p$ может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота α-частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию $E_п=14{,}5$ МэВ. На сколько энергия α-частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся при реакции протонов была равна нулю?*

В этой задаче реакция идет с поглощением энергии. По условию задана пороговая энергия налетающих α-частиц, т.е. минимальная энергия частиц, при которой реакция вообще может идти:

$$E_п=\frac{m_\alpha v^2_{\alpha\,\min}}{2}.$$

С другой стороны, она равна сумме энергии, поглощаемой во время реакции, и кинетической энергии центра масс системы:

$$E_п=\Delta E+E_{\text{цм}}.$$

Из закона сохранения импульса найдем скорость центра масс:

$$v_{\text{цм}}=\frac{m_\alpha v_{\alpha\min}}{m_\alpha+m_N},$$

откуда

$$E_{\text{цм}}=\frac{(m_\alpha+m_N)v^2_{\text{цм}}}{2}=\frac{(m_\alpha v_{\alpha\min})^2}{2(m_\alpha+m_N)}.$$

Тогда энергия, поглощенная в реакции, равна

$$\Delta E=E_п-\frac{(m_\alpha v_{\alpha\min})^2}{2(m_\alpha+m_N)}=$$
$$=E_п\frac{m_N}{m_\alpha+m_N}=\frac{14}{18}E_п.$$

Пусть теперь энергия α-частиц больше пороговой, но кинетическая энергия образовавшихся протонов равна нулю. В этом случае законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$E_\alpha=\Delta E+\frac{m_\mathrm{O}v_\mathrm{O}^2}{2},\quad m_\alpha v_\alpha=m_\mathrm{O}v_\mathrm{O},$$

где m_O, v_O — масса и скорость ядра кислорода. Отсюда найдем энергию налетающей α-частицы:

$$E_\alpha=\frac{m_\mathrm{O}}{m_\mathrm{O}-m_\alpha}\Delta E=\frac{17}{13}\Delta E=\frac{119}{117}E_п.$$

Следовательно, энергия α-частицы больше пороговой на величину

$$E_\alpha-E_п=\frac{2}{117}E_п=250\ \text{кэВ}.$$

Упражнения

1. Какая доля радиоактивных ядер с периодом полураспада $T=71{,}3$ дня распадается за время, равное $2/3\,T$ и $4/3\,T$?

2. При захвате нейтрона ядром $^6_3$Li происходит ядерная реакция

$$^6_3\mathrm{Li}+^1_0n\to{}^3_1\mathrm{T}+^4_2\mathrm{He},$$

в которой выделяется энергия $\Delta E=4{,}8$ МэВ. Найдите распределение энергии между продуктами реакции (ядром трития и α-частицей), считая кинетическую энергию исходных частиц пренебрежимо малой.

3. Реакцию синтеза дейтерия и трития

$$^2_1\mathrm{D}+^3_1\mathrm{T}\to{}^1_0n+^4_2\mathrm{He}$$

изучают, направляя ускоренные до энергии $E_\mathrm{D}=2$ МэВ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно к направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $\Delta E=17{,}6$ МэВ.

4. В термоядерных реакциях

$$^2_1\mathrm{H}+^3_1\mathrm{H}\to{}^4_2\mathrm{He}+^1_0n$$

и

$$^3_1\mathrm{H}+^3_1\mathrm{H}\to{}^4_2\mathrm{He}+2^1_0n$$

суммарная кинетическая энергия образовавшихся частиц больше суммарной кинетической энергии исходных частиц на величины $E_1=17{,}6$ МэВ и $E_2=11{,}3$ МэВ соответственно. Определите дефект масс ядра $^2_1$H, если у ядра $^3_1$H он составляет 0,00239 а.е.м. Одной атомной единице массы соответствует энергия 931,5 МэВ.

5. В ядерной реакции образуется медленно движущаяся по сравнению со скоростью света α-частица и γ-квант с энергией $E_\gamma=19{,}7$МэВ. Пренебрегая скоростями вступающих в реакцию ядер, найдите скорость образовавшейся α-частицы. Энергию покоя α-частицы считать равной $E_\alpha=m_\alpha c^2=3730$ МэВ.

Экзамен — выпускной и... вступительный

О. ИВАНОВ

В данной заметке вниманию читателей предлагается вариант проводившегося в 1994 году в Санкт-Петербурге совмещенного вступительного (на естественные факультеты СПбГУ и в ряд технических вузов) и выпускного экзамена (для учащихся физико-математических школ и специализированных классов) — высшего уровня сложности в сложившейся в Петербурге системе разноуровневых выпускных экзаменов по математике. По условиям экзамена учащиеся решают задачи первых двух сюжетов («обязательных») и одного из трех последующих, оценка «пять» ставится тем, кто верно решил десять пунктов (из выбранных двенадцати).

1. Дана функция

$$f(x) = \log_2 x + \log_{2x} x.$$

а) Докажите, что числа x и $\frac{1}{4x}$ входят в область определения функции f одновременно и при этом $f\left(\frac{1}{4x}\right) = -f(x)$.

б) Решите уравнение $|f(x)| = f(2)$.

в) Докажите, что для любого натурального числа $n \ge 2$ уравнение $f(x) = f(x^n)$ имеет ровно одно решение на луче $[1; +\infty)$.

г) Найдите все такие a, при которых уравнение $f(x) = a\log_2^2 2x$ имеет три решения.

2. Дана функция

$$f(x) = \cos ax + \cos 2ax.$$

а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = f(3x)$.

б) Найдите все такие a, при которых $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

в) Найдите все такие a, при которых $f(x) > 0$ при всех $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

г) Найдите все такие a, при которых график функции f имеет центр симметрии.

3. Дана функция

$$f(x) = ax - 2\sqrt{x+1},\ a > 0.$$

а) Найдите все такие a, при которых функция f монотонна на луче $[0; +\infty)$.

б) Пусть $a = 1$. Найдите уравнения касательных к графику данной функции, проходящих через точку $A(5, 0)$.

в) Пусть $a = 1$. Найдите все точки оси абсцисс, через которые проходит ровно одна касательная к графику функции f.

г) Прямая l касается графика функции f в точке с абсциссой x_0. Найдите (при произвольном $a > 0$) такое значение x_0, при котором фигура, ограниченная этой прямой, графиком функции f и прямыми $x = -1$, $x = 2$, имеет наименьшую площадь.

4. Пусть a, b, c — это длины некоторых отрезков.

а) Докажите, что если $a = \sqrt[5]{2}$, $b = \sqrt[5]{3}$, $c = \sqrt[5]{7}$, то треугольник, который можно составить из этих отрезков, является остроугольным.

б) Выясните, существует ли треугольник со сторонами $a = 19^{21}$, $b = 20^{21}$, $c = 21^{21}$?

в) Докажите, что если для любого натурального числа n существует треугольник со сторонами a^n, b^n, c^n, то все эти треугольники — равнобедренные.

г) Пусть φ_n — это угол треугольника со сторонами $a = 1$, $b = \sqrt[n]{2}$, $c = \sqrt[n]{4}$, $(n \ge 2)$, лежащий против средней из них. Докажите, что последовательность $\{\varphi_n\}$ монотонна, и вычислите ее предел.

5. Пусть $A(i-1)$, $B(2i-1)$, $C(2-3i)$ — точки плоскости, соответствующие указанным комплексным числам, S — это окружность $|z| = 1$, а D — множество комплексных чисел, заданное неравенством $|2z-1| \le 1$.

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки $P \in S$ до точек A, B, C постоянна.

б) Изобразите на плоскости точки A, B и множество комплексных чисел вида $z(2i-1) + (1-z)(i-1)$, где $z \in D$.

в) Найдите такую точку $E \in D$ и все такие равносторонние треугольники с вершинами на S, для которых сумма квадратов расстояний от их вершин до E является наибольшей.

г) Выясните, верно ли, что для всякой точки w, лежащей в треугольнике ABC, найдется такое число $z \in D$, что

$$w = zz_k + (1-z)z_j,$$

где $z_k, z_j \in \{i-1, 2i-1, 2-3i\}$.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

СКОЛЬКО НОГ У СТРАУСА?

(Начало см. на с. 13)

Через некоторое время мальчик видит похороны.

— Что с этим дядей?

— Он умер.

— А, так значит...

7. — Если Вы дадите мне 50 долларов, Вы спасете жизнь достойному человеку!

— Что-то Вы не похожи на достойного человека!

— Я имею в виду ...

8. — Куда Вы так спешите?

— В трест. Надо там навести порядок.

— Вы из министерства?

— Нет, я ...

9. — В какую цену у вас телевизоры?

— Вот этот — 1000 рублей, а тот — 1740.

— И какая между ними разница?

— ...

10. Беседуют два миллионера.

— Есть только один честный способ нажить миллион!

— Какой же?

— Я так и думал, что ты ...

11. — Подставь ладошку, я тебе насыплю орешков!

— Лучше насыпьте папе!

— Ты так любишь папу?

— Да нет, просто ...

12. — Вот эти настенные часы ходят две недели без завода.

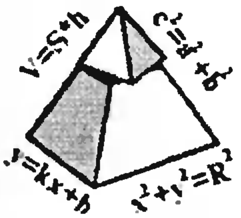
— Да что вы ?! Сколько же они будут ходить, если их ...

13. — Сделайте мне пробор посередине, чтобы волосы поделились ровно пополам.

— Не могу, у вас ...

И. Григорьева

XXI Российская олимпиада школьников по математике



В этом году зональный — IV этап Российской математической олимпиады проходил в дни весенних школьных каникул в городах Долгопрудном, Кемерове, Кирове и Ростове-на-Дону.

Заключительный этап Российской олимпиады принимал Саратов. Этому городу не впервые доводится проводить подобное мероприятие. Напомним, что дважды там проводились заключительные туры Всесоюзных математических олимпиад.

Около 130 школьников собралось на эти соревнования. Были и гости — команды Югославии и одной из провинций Китая. Хозяева показали участникам олимпиады свой город — театры, музеи и, конечно, красавицу Волгу, которая в это время была особенно полноводной — конец апреля, таянье снегов.

Результаты соревнований стали в некотором роде уникальными. Впервые за много лет в каждом из классов оказался один участник, показавший существенно лучший результат по сравнению с остальными. По девятым классам это восьмиклассник школы № 239 Санкт-Петербурга Николай Дуров, *по десятым классам — ученик той же школы* Сергей Норин *и по одиннадцатым классам —* Дмитрий Челкак, *также из Санкт-Петербурга, но из школы № 30. Взглянув на список призеров, вы обнаружите в нем еще немало представителей северной столицы.*

В рамках встречи участников олимпиады с редакцией журнала «Квант» был проведен традиционный для таких встреч математический бой между командами школьников и жюри. На этот раз победа досталась школьникам.

На закрытии олимпиады победители получили призы и дипломы. Приз журнала «Квант» был вручен, по традиции, самому молодому из участников — шестикласснику Владимиру Дремову *из Волгодонска.*

Неплохо выступили на олимпиаде ее гости. Команда Китая получила три вторых и три третьих премии, а команда Югославии — одну вторую премию.

Как обычно, мы публикуем задачи двух последних этапов олимпиады.

Зональный этап

9 класс

Первый день

1. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\le\frac{1}{xy}.$$

С.Дворянинов

2. Можно ли расставить по кругу 1995 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

А.Шаповалов

3. Две окружности с радиусами R и r касаются прямой l в точках A и B и пересекаются в точках C и D (рис.1).

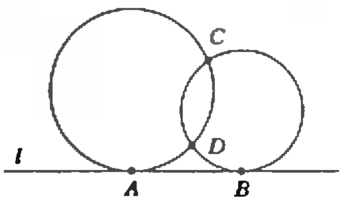


Рис. 1

Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, не зависит от длины отрезка AB.

М.Сонкин

4. Все стороны и диагонали правильного 12-угольника раскрашивают в 12 цветов (каждый отрезок — одним цветом). Существует ли такая раскраска, что для любых трех цветов найдутся три вершины, попарно соединенные между собой отрезками этих цветов?

С.Токарев

Второй день

5. Найдите все простые p такие, что число p^2+11 имеет ровно 6 различных делителей (включая единицу и само число).

Р.Женодаров

6. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (рис.2). Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность S_1 в точке D, окружность S_2 — в точке E и прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD=CB=CE$.

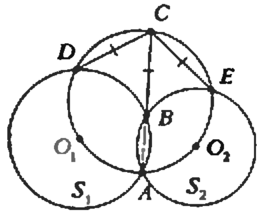


Рис. 2

М.Сонкин

7. Правильный шестиугольник со стороной 5 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1 (рис.3). Назовем *узлами* вершины всех таких треугольников. Известно, что более половины узлов отмечено. Докажите, что найдутся пять отмеченных узлов, лежащих на одной окружности.

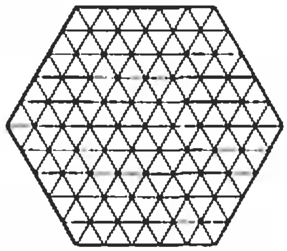


Рис. 3

Д.Кузнецов

8. Можно ли в таблице 11×11 расставить натуральные числа от 1 до 121 так, чтобы числа, отличающиеся друг от друга на единицу, располагались в клетках с общей стороной, а все точные квадраты попали в один столбец?

А.Шаповалов

10 класс

Первый день

1. Дана функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Найдите $\underbrace{f(\ldots f(f(19))\ldots)}_{95\text{ раз}}$.

А.Белов

2. Натуральные числа m и n таковы, что

$$\text{НОК}(m,n)+\text{НОД}(m,n)=m+n.$$

Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

С.Токарев

3. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на медиане треугольника, проведенной из вершины B.

А.Скопенков

4. На прямоугольном столе разложено несколько одинаковых квадратных листов бумаги так, что их стороны параллельны краям стола (листы могут перекрываться). Докажите, что можно воткнуть несколько булавок таким образом, что каждый лист будет прикреплен к столу ровно одной булавкой.

А.Берзиньш, И.Изместьев

Второй день

5. Рассматриваются всевозможные квадратичные функции $f(x)=ax^2+bx+c$, такие что $a<b$ и $f(x)\geq 0$ для всех x. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{a+b+c}{b-a}$?

Р.Женодаров

6. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB=AD$ и $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF\perp AE$. Докажите, что $AF\perp BE$.

М.Сонкин

7. N^3 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, после чего нить связана в кольцо (т.е. вершина первого кубика соединена с вершиной последнего). При каких N такое «ожерелье» из кубиков можно упаковать в кубическую коробку с ребром длиной N?

Н.Авилов

8. Улицы города Дужинска — простые ломаные, не пересекающиеся между собой во внутренних точках. Каждая улица соединяет два перекрестка и покрашена в один из трех цветов: белый, красный или синий. На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы, по одной каждого цвета. Перекресток называется положительным, если при его обходе против часовой стрелки цвета улиц идут в следующем порядке: белый, синий, красный, и отрицательным в противном случае. Докажите, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков кратна четырем.

С.Дужин

Ох, как трудно участникам

11 класс

Первый день

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. В прямоугольном параллелепипеде одно из сечений является правильным шестиугольником. Докажите, что этот параллелепипед — куб.

Д.Терешин, Р.Карасев

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. На плоскости рассматривается конечное множество равных, параллельно расположенных квадратов, причем среди любых $k+1$ квадратов найдутся два не пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.

В.Дольников

Второй день

5. Для углов α, β, γ справедливо неравенство $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq 2$. Докажите, что $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\sqrt{5}$.

А.Галочкин

6. Числовая последовательность a_0, a_1, a_2,... такова, что при всех неотрицательных m и n $(m\geq n)$ выполняется соотношение $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$. Найдите a_{1995}, если $a_1=1$.

О.Мусин

7. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (рис.4). Луч O_1B пересекает S_2 в точке F, а луч O_2B пересекает S_1 в точке E. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой EF, вторично пересекает окружности S_1 и S_2 в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN=AE+AF$.

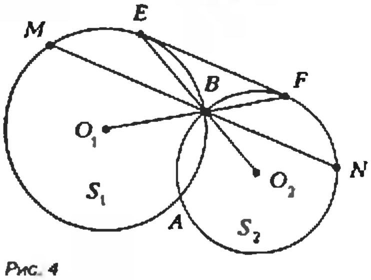


Рис. 4

М.Сонкин

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Заключительный этап

9 класс

Первый день

1. Товарный поезд, отправившись из Москвы в x часов y минут, прибыл в Саратов в y часов z минут. Время в пути составило z часов x минут. Найдите все возможные значения x.

С.Токарев

2. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

В.Гордон

3. См. задачу М1515.

4. Можно ли в клетки таблицы 9×9 записать натуральные числа от 1 до 81 так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 3×3 была одна и та же?

С.Токарев

Второй день

5. Назовем натуральные числа *похожими*, если они записываются с помощью одного и того же набора цифр (например, для набора 1,1,2 похожими будут числа 112, 121, 211). Докажите, что существуют три похожих 1995-значных числа, в записи которых нет нулей и такие, что сумма двух из них равна третьему.

С.Дворянинов

6. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $B_2A_1C_2$, $C_2B_1A_2$ и $A_2C_1B_2$.

Д.Терешин

Члены жюри за работой

7. См. задачу M1516.

8. В клетках таблицы 2000×2000 записаны числа 1 и -1. Известно, что сумма всех чисел в таблице неотрицательна. Докажите, что найдутся 1000 строк и 1000 столбцов таблицы таких, что сумма чисел, записанных в клетках, находящихся на их пересечении, не меньше 1000.

Д.Карпов

10 класс

Первый день

1. Решите уравнение
$\cos\cos\cos\cos\cos x = \sin\sin\sin\sin x$.

В.Сендеров, И.Ященко

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. См. задачу M1517.

4. Докажите, что если у выпуклого многоугольника все углы равны, то по крайней мере у двух его сторон длины не превосходят длин соседних с ними сторон.

А.Берзиньш, О.Мусин

Второй день

5. Последовательность натуральных чисел (a_i) такова, что для всех $i \neq j$ $\text{НОД}(a_i, a_j) = \text{НОД}(i, j)$. Докажите, что $a_i = i$ для всех $i \in N$.

А.Голованов

6. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D, а прямую AB — в точке M ($MB < MA$, $MD < MC$). Пусть K — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB. Докажите, что угол MKO прямой.

Л.Купцов

7. См. задачу 8 для 9 класса.

8. См. задачу M1520.

11 класс

Первый день

1. Могут ли числа 1, 2, 3, ..., 100 быть членами 12 геометрических прогрессий?

А.Голованов

2. Докажите, что любую функцию, определенную на всей оси, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет ось симметрии.

Д.Терешин

3. См. задачу M1519.

4. См. задачу 4 для 10 класса.

Второй день

5. Докажите, что для любого натурального числа $a_1 > 1$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ делится на $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ при всех $k \geq 1$.

А.Голованов

6. На карусели с n сиденьями мальчик катался n сеансов подряд. После каждого сеанса он вставал и, двигаясь по часовой стрелке, пересаживался на другое сиденье. При этом мальчик ни разу не совершил полного круга. Число сидений карусели, мимо которых мальчик проходит при пересаживании, включая и то, на которое он садится, назовем длиной перехода. При каких n за n сеансов мальчик мог побывать на каждом сиденье, если длины всех $n - 1$ переходов различны?

В.Ню

7. См. задачу M1518.

8. См. задачу 8 для 10 класса.

А.Савин

Призеры XXI Российской олимпиады школьников по математике

Первые премии

по девятым классам получил

Дуров Николай — Санкт-Петербург, с.ш. 239;

по десятым классам —

Норин Сергей — Санкт-Петербург, с.ш. 239;

по одиннадцатым классам —

Челкак Дмитрий — Санкт-Петербург, с.ш. 30.

Вторые премии

по девятым классам получили

Старков Константин — Санкт-Петербург, с.ш. 30,
Шаповалов Данил — Иваново, с.ш. 13,
Спиридонов Антон — Киров, с.ш. 35,
Уздин Сергей — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Русаков Александр — Калуга, с.ш. 10,
Плахов Андрей — Сургут, с.ш. 1,
Сааль Александр — Санкт-Петербург, академическая гимназия,
Вашевник Андрей — Москва, с.ш. 57,
Шадрин Сергей — Москва, с.ш. 57,
Симановский Андрей — Санкт-Петербург, с.ш. 239;

по десятым классам —

Запорожец Дмитрий — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Рудо Елена — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Егоров Александр — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Салихов Константин — Москва, СУНЦ МГУ,
Якимова Оксана — Москва, с.ш. 57,
Френкель Владимир — Санкт-Петербург, с.ш. 30,
Потапов Владимир — п. Черноголовка Московской обл., с.ш.82,
Слободянин Николай — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Есаулова Вероника — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Макарычев Юрий — Москва, с.ш. 57;

по одиннадцатым классам —

Островский Михаил — Москва, с.ш. 57,
Косовский Николай — Санкт-Петербург, с.ш. 30,
Куликов Михаил — п. Черноголовка Московской обл., с.ш. 82,
Петров Константин — Москва, с.ш. 7,
Борисов Александр — Нижний Новгород, с.ш. 40,
Буфетов Александр — Москва, с.ш. 2,

Баргачев Виктор — Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Подлинский Олег — Долгопрудный, с.ш. 5,
Кацев Илья — Санкт-Петербург, с.ш. 30,
Алехнович Михаил — Москва, с.ш. 57,
Никонов Игорь — Москва, с.ш. 345.

Третьи премии

по девятым классам получили

Смирнов Александр — Москва, с.ш. 57,
Малистов Алексей — Рязань, с.ш. 52,
Мельник Сергей — Санкт-Петербург, с.ш. 239
Мищенко Андрей — Ульяновск, с.ш. 2,
Севрюхин Юрий — Москва, с.ш. 57,
Самойлов Борис — п. Юрья Кировской обл., с.ш. 2,
Лепчинский Михаил — Челябинск, с.ш. 31,
Прудников Андрей — Москва, с.ш. 57,
Злобин Сергей — Киров, с.ш. 35;

по десятым классам —

Патрикеев Михаил — Екатеринбург, СУНЦ,
Сергеева Татьяна — Ижевск, с.ш. 41,
Рогожников Евгений — Калуга, с.ш. 41,
Белозеров Дмитрий — Долгопрудный, с.ш. 5,
Коровин Александр — Долгопрудный, с.ш. 5,
Крюков Виктор — Москва, с.ш. 57;

по одиннадцатым классам —

Зеленский Олег — Темрюк, с.ш. 13,
Кириенко Денис — Тула, с.ш. 73,
Попов Олег — Москва, с.ш. 57,
Прафенов Антон — Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Дужин Федор — Переславль-Залесский, с.ш. 7,
Евдокимов Лев — Санкт-Петербург, с.ш. 239,
Романова Софья — Кирово-Чепецк, с.ш. 3,
Тиморин Владлен — Москва, с.ш. 1303,
Пикулин Сергей — Киров, с.ш. 35.

XXIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

В этом году заключительный этап традиционной олимпиады прошел с 20 по 26 апреля в городе Челябинске. В нем приняли участие 136 школьников со всей России: 45 девятиклассников, 46 десятиклассников и 45 одиннадцатиклассников. Приятно отметить рост интереса школьников к олимпиадному движению.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 21 апреля, а уже 22 апреля прошел теоретический тур. Как обычно, 9-классникам было предложено 4 задачи на четыре часа, а 10- и 11-классникам — 5 задач на пять часов.

23 апреля был день отдыха. Вечером все участники олимпиады посетили Челябинский драматический театр (красивое здание современной архитектуры) и с интересом посмотрели оригинальную трактовку пьесы А.Островского «На всякого мудреца довольно простоты». А на следующий день состоялся экспериментальный тур. В каждом классе было предложено по 2 экспериментальные задачи на четыре часа.

Большое участие в подготовке теоретического тура принимали преподаватели Московского физико-технического института, а в подготовке экспериментального тура — преподаватели Педагогического института, физико-математического лицея 31 и ряда других общеобразовательных учреждений г. Челябинска. Работой жюри руководили профессор Челябинского педагогического института Б.М.Слепченко и профессор Московского физико-технического института С.М.Козел.

Особенностью олимпиады было проведение апелляции как по теоретическому, так и по экспериментальному турам.

На торжественном закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы и ценные призы (в том числе специальные — за успехи в теоретическом или экспериментальном туре, самому юному участнику и т.д.). Специальным решением жюри ценным подарком был награжден учитель физики школы 3 г. Березники Пермской области Ефимов В.В. за отличную подготовку школьников, неоднократно побеждавших на Всероссийских, а также (раньше) Всесоюзных олимпиадах.

Из победителей по одиннадцатому классу составлена сборная команда России для участия в Международной физической олимпиаде, которая в этом году проходила в Австралии. А победители по 10 классу приглашены в МФТИ на зимние сборы. Эти ребята составят основу сборной команды России на Международной физической олимпиаде 1996 года.

Теоретический тур

9 класс

1. По реке со скоростью v плывут мелкие льдины. Льдины распределены равномерно по поверхности воды и покрывают ее n-ю часть. В некотором месте происходит затор. В заторе льдины полностью покрывают поверхность воды, не нагромождаясь друг на друга. Определите, с какой скоростью будет расти граница сплошного льда. Какая сила будет действовать на 1 м затора вследствие остановки льда? Плотность льда $\rho = 0{,}91 \cdot 10^3$ кг/м^3, толщина льда h = 20 см, скорость реки $v = 0{,}72$ км/ч, плывущие льдины покрывают $n = 0{,}1$ часть поверхности воды.

2. Человек, присевший на корточки, резко распрямляется и, оттолкнувшись от пола, подпрыгивает на высоту h, равную $3/4$ от роста человека l (величина h — это высота подъема центра тяжести относительно пола). Найдите среднюю силу, с которой человек давит на пол во время толчка. Считать, что в начальном положении центр тяжести находится на высоте $l/4$, а в выпрямленном состоянии — на высоте $l/2$. Масса человека $m = 75$ кг.

3. В дне теплоизолированного сосуда (калориметра) имеется небольшое отверстие, через которое может вытекать вода. В сосуд загрузили смесь воды и льда при температуре 0°С и погрузили в нее электрический нагреватель мощностью $P = 600$ Вт. Во время эксперимента измерялась температура T внутри калориметра в зависимости от времени t. Используя приведенный экспериментальный график (рис.1), определите: 1) какая масса воды оказалась в калориметре к моменту окончания тая-

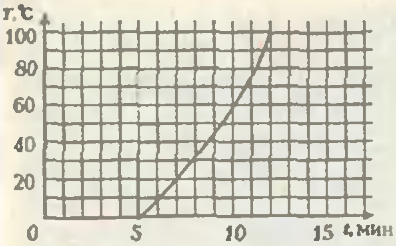


Рис. 1

ния льда, 2) какая масса воды вытекала из отверстия в течение 1 мин, 3) сколько воды было в калориметре в начале эксперимента, 4) сколько льда было в калориметре в начале эксперимента, 5) какая масса воды осталась в калориметре к моменту окончания эксперимента (t = 17 мин). Удельная теплота парообразования воды r = = 2260 кДж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4,2 кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда λ = 340 кДж/кг. *Примечание.* Теплоемкость калориметра не учитывать.

4. В схеме, изображенной на рисунке 2, из трех сопротивлений R_1, R_2 и R_3 два одинаковы. Известно, что напряжение

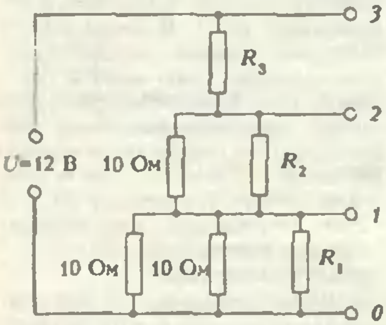


Рис. 2

между точками *2* и *0* равно 6 В, а между точками *3* и *1* равно 10 В. Определите неизвестные сопротивления.

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. В теплоизолированной трубе (рис.3) установлена неподвижная перегородка *П* с многочисленными тончайшими отверстиями (порами). В начальный момент слева от перегородки под подвижным поршнем *A* содержится m = 1 кг воды, а правый, также теплоизолированный, поршень *B* прижат к перегородке *П* атмосферным давлением p_2. Далее вода под давлением $p_1 = 10^3$ атм начинает очень медленно продавливаться сквозь перегородку под поршень *B*. При этом температура воды слева равна t_1 = 95°С. Определите долю испарившейся воды после окончания процесса продавливания.

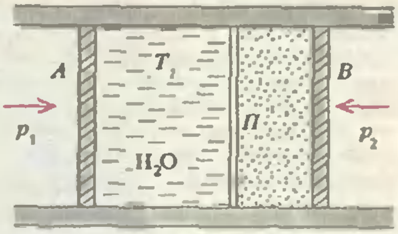


Рис. 3

Удельную теплоемкость воды считать постоянной и равной c = 4,2 кДж/(кг·К). Удельная теплота парообразования r = = 2260 кДж/кг. Считать в условиях задачи *объем* единицы массы воды не зависящим от давления и температуры. Оба поршня перемещаются без трения.

3. *Сосуд разделен* на две части горизонтальной теплонепроницаемой перегородкой, в которой имеется маленькое отверстие размером много меньшим длины свободного пробега молекул газа (рис.4). Давление газа в нижней части сосуда равно p_0 = = 6 мм рт.ст. Верхняя часть сосуда высотой h = 9 см заполнена маслом (коэффициент поверхностного натяжения σ = = 0,03 Н/м, плотность ρ = 870 кг/м^3). Над отверстием образовался газовый пузырь радиусом 1 мм. При каком соотношении температур масла и газа размер

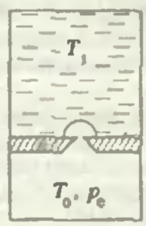


Рис. 4

пузыря останется неизменным? Температура *газа в пузыре* равна температуре масла.

4. Два стержня погружены вертикально в электролит так, что глубина погружения значительно превосходит расстояние между ними. Измеренное сопротивление между стержнями оказалось равным R. При погружении стержней на удвоенную глубину сопротивление стало равным 2/3 R. Определите, каким будет сопротивление между стержнями, если глубину погружения еще раз удвоить. Считать, что проводимость материала стержней значительно больше, чем проводимость электролита.

5. Внутри очень длинного соленоида вдали от его торцов магнитное поле однородно и его индукция равна B. Один из торцов соленоида закрыт картонным диском. На диск помещают небольшой

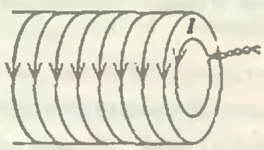


Рис. 5

круговой виток из проволоки так, что центр витка совпадает с осью соленоида (рис.5). Радиус витка R, ток в нем I. Найдите силу натяжения проволоки витка.

11 класс

1. Определите период колебаний однородного бруска массой M, подвешенного с помощью двух пружин жесткостью k_1 и k_2 ($k_1 > k_2$) и нерастяжимой нити, перекинутой через *невесомый блок* (рис.6).

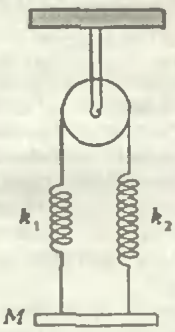


Рис. 6

2. Используя необходимые данные из первого абзаца приведенной ниже заметки, оцените, на какое максимальное расстояние от Солнца могут удалиться космические аппараты в течение ближайшего миллиарда лет. Как изменится ответ, если использовать данные не первого, а второго абзаца? Влиянием космических объектов вне *Солнечной системы* пренебречь. В стиле газетной публикации добавим, что свет от Солнца до *Земли идет* около 8 минут.

СО СКОРОСТЬЮ 130 ТЫСЯЧ КИЛОМЕТРОВ В ЧАС ПРОЧЬ ОТ ЗЕМЛИ

Борис Лысенко. «Известия», 21 февраля 1995

Два ветерана американской космонавтики снова и снова удивляют своими неожиданными резервами энергии во время полета из Солнечной системы в карусель Млечного пути.

В 1972 и 1973 году с Земли к центру Млечного пути отправились два американских зонда — «Пионер-10» и «Пионер-11». Зонды летят по орбите, дви-

гаясь по которой смогут вернуться на Землю лишь через 250 миллионов лет.

За прошедшие двадцать с лишним лет оба «Пионера» благополучно прошли астероидный пояс и со скоростью 130 тысяч километров в час удаляются от Солнечной системы и находятся на расстоянии десяти миллиардов километров. Из-за огромного расстояния сигналы со спутников поступают на Землю с опозданием 12 часов.

Космические корабли будут функционировать до тех пор, пока не иссякнут термоэлектрические генераторы, вырабатывающие энергию. В целях экономии на борту кораблей в рабочем состоянии находятся лишь жизненно важные приборы.

Зонды измеряют «солнечный ветер», выясняют влияние гравитации на внешнюю систему планет, а также ищут доказательство наличия так называемых гравитационных волн, которые со скоростью света распространяют поле небесных тел.

На случай встречи в бесконечных пространствах Вселенной с инопланетянами ученые из НАСА на борту «Пионера» прикрепили табличку, на которой изображены мужчина и женщина, а также наша Солнечная система.

3. Предположим, что создан материал с необычной зависимостью коэффициента теплопроводности $æ$ от температуры T (рис.7). Пластину из такого

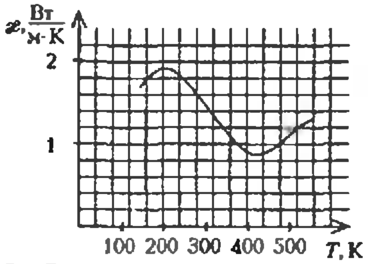


Рис. 7

материала толщиной $d = 1$ см и площадью $S = 100$ см^2 поместили между двумя стенками, температуры которых $T_1 = 160$ К и $T_2 = 500$ К поддерживаются неизменными. Какой тепловой поток установится между стенками? Укажите способ, с помощью которого можно найти распределение температуры внутри пластины. Найдите температуру в средней плоскости пластины ($x = d/2$). *Дополнение.* Поток тепла P, численно равный количеству теплоты, проходящему через площадку площадью S тонкого слоя вещества толщиной Δx, пропорционален разности температур ΔT между его поверхностями и обратно пропорционален его толщине: $P = æS\dfrac{\Delta T}{\Delta x}$, где $æ$ — коэффициент теплопроводности вещества.

4. Излучение аргонового лазера с длиной волны $\lambda = 500$ нм сфокусировано на плоском фотокатоде. Работа выхода материала фотокатода $A = 2$ эВ. Между плоским анодом, расположенным параллельно катоду, и катодом подключается источник с постоянной ЭДС. Оказалось, что диаметр пятна фотоэлектронов на аноде при ускоряющей разности потенциалов между анодом и катодом в два раза больше аналогичного пятна при тормозящей разности потенциалов (при смене полярности напряжения). Определите ЭДС источника.

5. В архиве Снеллиуса нашли оптическую схему. От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны только три точки: фокус f, источник света S и его изображение S'. Измерения показали, что расстояние fS равно 1 дюйму, $SS' = 27$ дюймам и $fS' = \sqrt{730}$ дюймов. Из текста следовало, что линза положительная и находится в воздухе. Чему равно фокусное расстояние этой линзы?

Экспериментальный тур

9 класс

1. Исследуйте зависимость скорости струи, вытекающей из сосуда, от высоты уровня воды в этом сосуде.

Приборы и оборудование: штатив с муфтой и лапкой; бюретка стеклянная со шкалой и резиновой трубкой; зажим пружинный; зажим винтовой; секундомер; воронка; кювета; стаканы с водой; лист миллиметровой бумаги.

2. Определите температуру воды, при которой ее плотность максимальна.

Приборы и оборудование: стакан с водой при температуре $t = 0$ °С; металлическая подставка; термометр; ложечка; часы; маленький стакан.

10 класс

1. Исследуйте зависимость ускорения шарика, движущегося по наклонному желобу, от угла наклона желоба к горизонту.

Приборы и оборудование: штатив с муфтой и лапкой; желоб; шарик; лента измерительная; копировальная бумага; отвес (нить с грузом); бумага; кнопки.

2. Определите давление насыщенных паров при температуре $t = 60$ °С, если известны атмосферное давление и давление насыщенных паров при комнатной температуре.

Приборы и оборудование: сосуд с горячей водой; сосуд с водой при комнатной температуре; пробирка; пробка с отверстием; термометр; линейка.

11 класс

1. Электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных «черного ящика» и конденсатора, подсоединена к источнику переменного напряжения. Определите мощность, потребляемую «черным ящиком».

Приборы и оборудование: «черный ящик»; конденсатор; провод с вилкой; источник переменного напряжения; ключ; авометр (мультиметр) для измерения переменных напряжений до 25 В (200 В) и токов до 50 мА (20, 200 мА).

2. Подвесьте груз к перекладине с помощью нитей так, как показано на рисунке 8.

1) Наблюдайте колебания маятника при неподвижной платформе. Нормальными называются колебания, при которых координаты, соответствующие разным степеням свободы, меняются с одинаковой частотой (при этом некоторые из координат могут быть постоянными). Укажите все нормальные колебания при неподвижной платформе.

2) Попытайтесь обнаружить нормальные колебания в случае вращающейся платформы.

3) Представьте теперь, что вначале, когда платформа покоилась, некто возбудил одно из нормальных колебаний, а затем начал вращать платформу и через некоторое время остановил ее. Сможете

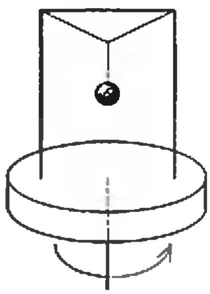


Рис. 8

ли Вы определить по результирующему движению маятника, какое из нормальных колебаний было возбуждено вначале? Определите экспериментально, каким условиям должно удовлетворять движение платформы (от начала ее вращения до остановки), чтобы это было возможно.

4) Решите ту же задачу для случая, когда платформу приводят во вращение, но не останавливают.

Приборы и оборудование: горизонтальная платформа, способная свободно вращаться вокруг вертикальной оси, снабженная горизонтальной перекладиной на двух вертикальных стойках; нить; груз; линейка.

В.Коровин, Ю.Самарский

Призеры XXIX Всероссийской олимпиады школьников по физике

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Гуляев Л. — Нижний Новгород, лицей 82,
Тиснек Д. — Санкт-Петербург, лицей ФТШ;

по 10 классам —

Иванов П. — Нижний Новгород, школа 40,
Милицин В. — Москва, школа 2,
Тарасов Е. — Санкт-Петербург, лицей ФТШ;

по 11 классам —

Азаров А. — Березники, школа 3,
Зеленский И. — Нижний Новгород, лицей 40,
Кузнецов А. — Тула, школа-лицей 73,
Сибиряков С. — Москва, школа 2.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Бровиков В. — Кемерово, лицей,
Выдрин А. — Москва, школа 57,
Зозуля В. — Таганрог, школа 8,
Коновалов П. — Кемерово, школа 11,
Кулида Д. — Москва, школа 1506,
Наривончик С. — Санкт-Петербург, лицей 239,
Никулин М. — Барнаул, школа 12,
Павленко Н. — Саратов, колледж,
Чувиков А. — Ноябрьск, школа 10;

по 10 классам —

Аничкин И. — Санкт-Петербург, лицей 239,
Бойко М. — Москва, школа 548,
Васильев Д. — Киров, Гуманитарная гимназия,
Горев А. — Киров, ФМЛ,
Гришаев А. — Старый Оскол, школа 16,
Дарьин А. — Москва, школа 548,
Найденов А. — Тула, лицей 1,
Прокудин А. — Самара, Аэрокосмический лицей,
Саламатов А. — Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,
Фомин Е. — Березники, школа 3,
Фомичев М. — Санкт-Петербург, лицей 239,
Чальцев А. — Арсеньев, гимназия;

по 11 классам —

Бренер С. — п.Черноголовка Московской обл., школа 82,
Бутаков В. — Новокузнецк, школа 59,
Кашменский Е. — Новосибирск, школа 130,
Коротков М. — Москва, школа 82,
Пакулин К. — Березники, школа 3,
Танков П. — Санкт-Петербург, лицей ФТШ,
Утешев А. — Саратов, ФТЛ 1.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Бессмертных С. — Челябинск, школа 82,
Буканин М. — Санкт-Петербург, гимназия 30,
Ильдуганов Н. — п. Кольцово Новосибирской обл., школа 21,
Зевайкин А. — Саранск, лицей 4,
Качура Б. — Владивосток, школа 2,
Морозов С. — Санкт-Петербург, АГСПЕ ГУ,
Ризен М. — Тула, школа 73,
Сибирев Н. — Санкт-Петербург, школа 419,
Синило П. — Фрязино, школа 1;

по 10 классам —

Баранов С. — Ижевск, гимназия 41,
Гариффулин Р. — Уфа, школа-гимназия 3,
Жижелев А. — Воронеж, колледж 1,
Карпеш М. — Челябинск, ФМЛ 31,
Попов А. — Новгород, центр «Эврика»,
Саньков Д. — Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Стефанов К. — Москва, СУНЦ МГУ,
Топоровский Д. — Новосибирск, школа 165;

по 11 классам —

Афанасьев А. — Нижний Новгород, школа 82,
Браилов Ю. — Москва, школа 57,,
Васильев В. — Москва, СУНЦ МГУ,
Вертячих А. — Челябинск, ФМЛ 31,
Лобаскин Д. — Челябинск, ФМЛ 31,
Колыгин Д. — Северодвинск, лицей 17,
Попов М. — Волгоград, гимназия 138,
Савельев А. — Санкт-Петербург, гимназия 30,
Сафонов М. — Оренбург, гимназия 1,
Ташенов С. — Москва, СУНЦ МГУ.

II Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Астрономические олимпиады в России продолжают развиваться, их проводит все большее число городов. В этом году состоялась уже вторая олимпиада на общероссийском уровне, ее заключительный этап прошел с 12 по 17 мая в городе Рязани — на базе Рязанского государственного педагогического университета.

Как и на первой олимпиаде, участники были разделены на две группы — младших (8—9 классы) и старших (10—11 классы). Общие правила проведения мало отличались от прошлогодних (см. «Квант» № 6 за 1994 год). А всего в Рязань приехал 71 школьник из различных областей, краев, республик Российской Федерации, а также из Москвы и Санкт-Петербурга.

Задачи теоретического тура

8—9 классы

1. В какое время суток на данную область земной поверхности (например, на Рязанскую область) в среднем выпадает больше метеорного вещества?

2. На какой широте может находиться обсерватория «Медведь», если высоты некоторого светила в верхней и нижней кульминациях составляют $h_1 = 86^\circ 14'$ и $h_2 = 43^\circ 32'$?

3. С какой планеты можно наблюдать наиболее продолжительное полное затмение Солнца? Параметры самых больших

14 мая состоялся теоретический тур. Школьникам было предложено по 5 задач, и на их решение отводилось 3,5 часа.

Жюри, в состав которого вошли представители Рязани, Рязанской области, Москвы, Подмосковья и Кабардино-Балкарии, в тот же день проверило работы (которые, конечно, были предварительно зашифрованы); одну и ту же задачу у всех участников проверял один и тот же член жюри (этим достигается максимальное единообразие проверки). Правильно решенная задача, независимо от способа решения, оценивалась в 10 баллов. А вот что касается неполных решений, то оценивался не только «процент решения», но и способ: чем меньше действий нужно было сделать, чтобы довести до конца предлагавшееся решение, тем выше ставился балл. Иными словами, громоздкие решения не поощрялись.

К сожалению, теоретический тур выявил весьма большой разброс в уровне подготовки школьников — встречались работы, где решены были все задачи, и работы, где почти ничего решено не было.

15 мая прошел второй, творческий тур. Школьникам 10—11 классов нужно было предложить решение одной задачи, которая давалась в достаточно общей формулировке, а ученикам 8—9 классов — предложить решение целой проблемы защиты Земли от астероидов.

Каждую работу творческого тура (также в зашифрованном виде) проверяли независимо три члена жюри (причем ни один принципиально не знал мнения других). Каждый из членов жюри мог поставить до 10 баллов. Затем баллы суммировались. Таким образом, за творческий тур можно было получить максимум 30 баллов.

Немало было интересных проектов защиты Земли от астероидов, но почему-то почти все предлагали именно воевать с астероидами, запуская с Земли ракеты. А ведь это нанесет существенно больший экологический ущерб, чем падение астероида на Землю (зависимость простая — чем больше астероид, тем больший груз «вооружений» придется выводить на орбиту). И до тех пор, пока нет баз на Луне или в других местах вне Земли, разумнее поточнее вычислить место падения и эвакуировать население.

В тот же день участники олимпиады ознакомились с оценкой своих работ теоретического тура и побеседовали с членами жюри, проверявшими работы. Некоторые школьники смогли доказать, что оценку им следует повысить, но в целом претензий к жюри почти не было.

На закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы, грамоты и призы. Каждому участнику был подарен «Словарь астрономических терминов», выпущенный специально к олимпиаде (автор — член жюри олимпиады, директор астрономической обсерватории РГПУ А.К.Муртазов).

Среди руководителей делегаций на этот раз тоже проводились конкурсы. Так, Главным астрологом олимпиады на 1995 год был избран С.Ф.Заикин (г.Ухта), а первое место в конкурсе астрономических анекдотов и курьезных случаев завоевал рассказ А.В.Сушко (г.Нальчик) о случае наблюдения галилеевых спутников Юпитера, при котором «галилеевость» этих спутников была подвергнута сомнению.

В заключение приглашаем всех желающих участвовать в следующей, III Российской астрономической олимпиаде, которая, по всей видимости, пройдет в середине марта 1996 года в Москве.

спутников различных планет таковы:

	$R_{сп}$ (км)	$R_{орб}$ (тыс.км)	$T_{об}$ (сут)
Луна	1738	384	27,3
Каллисто	2400	1880	16,7
Титан	2575	1222	16,0
Оберон	815	581	13,5
Тритон	1600	395	5,8
Нереида	100	6212	358
Харон	630	19,6	6,4

4. Оцените массу одинокого (т.е. находящегося вне Солнечной или другой звездной системы) астероида круглой формы радиусом $R = 1100$ км, если пуля, выпущенная из АКМ на его поверхности с начальной скоростью $v_0 = 715$ м/с, возвратилась через время $\tau = 40$ лет. Астероид находится вдали от других небесных тел.

5. Оцените, на какую максимальную высоту над горизонтом поднимется сегодня в Рязани Солнце. В какое время это произойдет? Географическая широта Рязани $\varphi = 54°37'$ с.ш., долгота $\lambda = 39°44'$ в.д.

10—11 классы

1. Два астероида находятся на одном и том же расстоянии от Солнца. Один астероид — темный, поглощающий практически все падающее на его поверхность излучение, второй — светлый, отражающий половину падающей энергии. Первый астероид имеет среднюю температуру поверхности -100 °С. Какова средняя температура поверхности второго?

2. В плоскости симметрии звездного диска галактики располагается тонкий (по сравнению с диском) слой поглощающего вещества (межзвездной пыли), который ослабляет втрое проходящий через него свет (идущий к наблюдателю). На сколько звездных величин галактика выглядела бы ярче, если бы этой пыли не было? Луч зрения не лежит в плоскости галактики.

3. В двойной системе, состоящей из двух одинаковых звезд солнечной массы ($2 \cdot 10^{30}$ кг), линии H_α (6563 Å) периодически раздваиваются и их компоненты расходятся на 1,3 Å. Найдите линейное расстояние между звездами, если луч зрения лежит в плоскости орбиты.

4. См. задачу 4 для 8 – 9 классов.

5. Американский искусственный спутник Земли массой $m = 200$ кг, движущийся по круговой орбите в верхних слоях атмосферы, испытывает сопротивление разреженного воздуха силой $F = 700$ мкН. Определите, как изменится скорость спутника за один оборот вокруг Земли. Высота полета спутника над поверхностью Земли мала по сравнению с радиусом Земли ($R = 6400$ км).

Задачи творческого тура

8—9 классы

Предложите обоснованный проект защиты Земли от астероидов и других опасных для жителей Земли небесных тел.

10—11 классы

Опишите, как с помощью гравитации планет-гигантов увеличить скорость космического корабля, стартующего с Земли и направляющегося за пределы Солнечной системы. Приблизительно оцените, на сколько можно увеличить скорость космического корабля с помощью такого маневра вблизи Юпитера. Можно ли увеличить скорость космического корабля, направляющегося за пределы Солнечной системы, первоначально направляя его на Солнце? Как и насколько?

М.Гаврилов

Призеры II Российской олимпиады школьников по астрономии и космической физике

Дипломы I степени получили

Белотелов В. — Москва,
Гаврилов А. — Самара,
Егоров И. — Москва,
Селезнев Д. — Москва,
Тунцов А. — Мытищи,
Чилингарян И. — Москва.

Дипломы II степени получили

Абезбекеров М. — Волгоград,
Бударов А. — Самара,
Глазков Г. — Санкт-Петербург,
Евдокимов Н. — Москва,
Казанов М. — Нижний Новгород,
Коробков П. — Новосибирск,
Кузнецов М. — Жуковский,
Ростопшин М. — Ленинградская обл.,
Степашин М. — Рязанская обл.,
Шмырев Н. — Астрахань.

Дипломы III степени получили

Аверин П. — Рязанская обл.,
Армедянов М. — Оренбург,
Бакланов П. — Москва,
Буслаев А. — Киров,
Гармаев Б. — Улан-Удэ,
Геращенко С. — Астрахань,
Десяткин К. — Уфа,
Довжиков А. — Ухта,
Захаров Р. — Сыктывкар,
Иерусалимов К. — Москва,
Куликов Ю. — Нижний Новгород,
Лушников В. — Ижевск,
Лысков Н. — Киров,
Макрушин С. — Липецк,
Пригорнев Е. — Ухта,
Родионов С. — Санкт-Петербург,
Сидоров В. — Ухта,
Соколов Д. — Ярославль,
Чураев А. — Самара.

Олимпиада Сороса по математике

Среди множества различных математических конкурсов и олимпиад, проводящихся в России и в отдельных городах, в этом году появилась еще одна, начавшаяся в сентябре 1994 года публикацией задач «Заочного тура» в «Учительской газете». Она получила большой отклик: на заочный тур по математике было прислано около 2000 работ.

Благодаря усилиям Игоря Федоровича Шарыгина — хорошо известного нашим читателям математика и педагога, взявшего на себя основной труд составления вариантов заданий для всех трех туров, Соросовская олимпиада по математике приобрела свой стиль: хотя многие из задач оригинальны или почти неизвестны, в совокупности они представляют типичные для разных периодов этого (а отчасти и прошлого) века школьные и конкурсные темы — прежде всего, это трудная геометрия, которой увлекались и увлекали учеников лучшие учителя; алгебра и анализ, включая излюбленные находки экзаменаторов ведущих вузов (в годы больших конкурсов); наконец, просто вопросы на сообразительность и здравый смысл.

В середине июля вышла книга «Соросовские олимпиады школьников», в которой собраны все задачи по физике, химии, биологии и математике и приведены списки победителей.[1] Из математических задач только одна помещена без решения, и мы с удовольствием включили ее в «Задачник «Кванта» (М1513). Кроме того, в книге приведены и задачи последней Московской математической олимпиады (она для москвичей считалась предпоследним туром Соросовской).

Но нам особенно хочется обратить внимание читателей — и «математиков», и «физиков», и устроителей олимпиад — на раздел «Биология». Здесь много интересных вопросов, требующих логических и отчасти даже математических размышлений, понятных не только специалистам, и приведен тщательный анализ ответов участников. Жаль, что математики не сделали такой работы.

Если Соросовские олимпиады будут продолжаться — пожелаем успеха их участникам!

Н. Васильев

[1] *Фонд Сороса бесплатно рассылает ее участникам олимпиады и тем, кто прислал заявки от школ (по адресу 121019 Москва, а/я 109, «Соросовские олимпиады»).*

Олимпиада Сороса по физике

В Москве с 14 по 19 мая прошел заключительный тур Соросовской физической олимпиады. На него были приглашены победители очных туров олимпиады, прошедших в 10 городах страны, а также особенно хорошо выступившие участники заочного тура из тех мест, где очные туры мы провести не смогли. Всего в заключительном туре приняли участие 102 ученика 10 и 11 классов со всей страны (был там и один девятиклассник).

Олимпиада состояла из двух официальных туров — теоретического и экспериментального. Кроме того, для желающих был проведен межпредметный тур. Дело в том, что одновременно проходили все четыре олимпиады

Сороса — по физике, математике, химии и биологии, и некоторые участники были приглашены на две, а то и на три из них. Именно для них и проводился межпредметный тур, на котором были задачи по всем четырем дисциплинам и можно было выбирать задачи в любых сочетаниях — в официальный зачет этот тур не входил, но призы за красивые решения в программе были предусмотрены.

На теоретическом туре по физике в 10 классе было предложено 4 задачи, в 11 классе — 5 задач. «Задачник «Кванта» в этом номере журнала составлен именно из задач заключительного тура Соросовской олимпиады (еще одна задача — Ф1512 — была опубликована в «Кванте» № 4-95). На экспериментальном туре каждому участнику нужно было выполнить 2 задания — на каждое отводилось не так много времени и приходилось работать очень быстро. Мы непременно опубликуем условия этих задач в специальной заметке — здесь же скажем только, что одна из двух задач была электрической, а другая механической.

Мы очень старались сделать так, чтобы не помешать проведению Всероссийской физической олимпиады — отсюда не совсем удобные сроки проведения (заочный тур — сентябрь, очный — декабрь и заключительный — середина мая), зато многие участники олимпиады Сороса по физике успели выступить и на Всероссийской физической олимпиаде. Интересно отметить, что среди — победителей многие (но далеко не все!) успешно выступили и там, и тут — но результаты были во многих случаях совершенно различными. Это, на наш взгляд, означает, что олимпиады успешно дополняют друг друга (впрочем, тут могут быть и другие мнения).

Абсолютно лучший результат по 10 классам получил девятиклассник из подмосковного Фрязино Павел Синило. В 11 классе лучший результат у Евгения Кашменского из Новосибирска. Среди победителей ребята из Москвы, Санкт-Петербурга, Тулы, Новосибирска, Нижнего Новгорода и просто Новгорода, Саратова, Саранска, Ижевска, подмосковных Фрязино, Протвино и Черноголовки, Сергиева Посада, Березников, Красноярска, Воронежа, Екатеринбурга, Барнаула, Вольска, Махачкалы, Протвы Калужской области и Костерева Владимирской области.

Проводили олимпиаду, проверяли работы и общались с участниками в основном победители Всесоюзных и Международных олимпиад прежних лет — этот факт особенно приятно отметить.

Мы желаем дальнейших успехов победителям Соросовской физической олимпиады и приглашаем всех желающих участвовать в ней в следующем году. И пусть победят сильнейшие!

А.Зильберман

Победители конкурса «Математика 6—8»

Лучших результатов добились математические кружки:

школы 64 Омска — руководитель *Топчий В.А.*,
физ-мат. лицея 27 Харькова — руководитель *Крижановский О.Ф.*,
при Ивановском энергетическом университете — руководитель *Токарев С.И.*,
школы 65 Пензы — руководитель *Пендюрин А.И.*,
лицея-интерната Чебоксар — руководитель *Иванов С.А.*,
школы п. Кильмезь Кировской обл. — руководитель *Глушков П.М.*,
школы д. Коростелево Калужской обл. — руководитель *Демидов А.И.*,
политехнической гимназии Нижнего Тагила — руководитель *Закарлюк Л.И.*

Кроме того, победителями стали следующие школьники:

Шаповалов Данил — Иваново, школа 33, 8 кл.,
Абанин Дмитрий — Ростов-на-Дону, школа 56, 8 кл.,
Дремов Владимир — Волгодонск, школа 24, 6 кл.,
Бейлин Андрей — Ростов-на-Дону, школа 58, 7 кл.,
Смирнов Евгений — Москва, школа 920, 7 кл.,
Середавин Павел — школа с. Аксеновка Курской обл., 7 кл.,
Лепин Дмитрий — Минск, школа 19, 8 кл.,
Полиектов Владислав — Северодвинск, школа-лицей 17, 8 кл.,
Плиев Майрам — Владикавказ, школа-лицей 39, 7 кл.,
Гуляев Михаил — Нижний Новгород, школа 139, 7 кл.

Победившие кружки приглашены в летний математический лагерь на Рубском озере (под Иваново), а школьники-победители награждаются призами.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. См. рис.1.

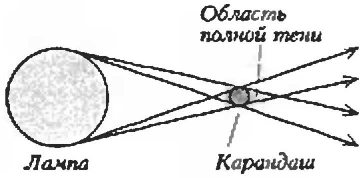


Рис. 1

2. Проекционные аппараты рассчитаны на конические световые пучки. Их дают только точечные источники света, каковыми лампы дневного света не являются. **3.** На одной прямой и так, чтобы плоскости предмета и экрана были перпендикулярны к ней. **4.** Когда источник света – точечный. **5.** Когда источник света больше предмета, а экран находится от предмета дальше чем вершина конуса полной тени (см. рис.1). **6.** Если из этой области будет видна часть источника света. **7.** При освещении фарами неровности дают хорошо заметные издали тени.
8. Это – изображения Солнца, полученные при помощи камеры-обскуры, отверстием которой является просвет между листьями, а экраном – земля. Когда размер отверстия больше изображения Солнца на земле, форма пятен изменяется.
9. Нет (см., например, рис.2). **10.** Отдельные участки протяженного источника света создают тени, накладывающиеся друг на друга. При этом тень будет иметь тем более резко очерченную границу, чем меньше расстояние от предмета до экрана.

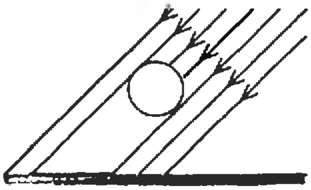


Рис. 2

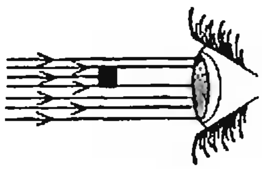


Рис. 3

11. Раскаленные непрозрачные частицы в пламени задерживают свет от лампы, а сами испускают менее интенсивный свет. При этом на экране за пламенем получается менее освещенный участок, что и воспринимается как тень.
12. Не возникает резких теней. **13.** Нет, не изменяется.
14. Гвоздик отбрасывает на сетчатку тень, которая ориентирована так же, как сам гвоздик. Но мозг «переворачивает» изображение, и тень кажется нам перевернутой.
15. Нет, так как лучи, идущие от звезды, параллельны, а ночью зрачок расширен и тень спички не покрывает его полностью (рис.3).
16. Воздух над костром нагрет в разных местах по-разному и поэтому обладает различной плотностью. Лучи света, проходя неоднородную среду, распространяются не по прямым линиям и искажают изображение предметов. **17.** Это – эффект перспективы. Подобное впечатление создается и тогда, когда мы смотрим вдоль железнодорожного полотна. **18.** Непосредственным измерением можно проверить, что отрезки равны, хотя кажутся неодинаковыми. Это – одна из оптических иллюзий.

Микроопыт

В первом случае тень от карандаша будет более четкой, чем во втором, так как горизонтальные размеры пламени свечи меньше вертикальных. См. также решение задачи 10.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Задачи

(см. «Квант» № 4)

1. Обозначим через n количество заказанных табуреток. По условию, $\frac{n}{3}-\frac{n}{5}=7k+2$ или $2n=15\cdot7k+30$. Значит, число k четно: $k=2p$. Отсюда $n=15\cdot7p+15$, а $\frac{n}{3}=7\cdot5p+5$, т.е. на выполнение заказа потребуется $5p$ недель и еще 5 дней, если изготавливать по 3 табуретки в день. Так как Джузеппе закончит работу в воскресенье, то начать ее он должен в среду.
2. $2^4=4^2$ (или $4^2=2^4$).
3. Без грошей или 32 мыши.
4. Утверждение задачи следует из тождества

$$n^2+n^2(n+1)^2+(n+1)^2=\left(n^2+n+1\right)^2.$$

5. Да, может. Представьте себя вблизи Северного полюса, а предмет – находящимся на том же меридиане по другую сторону от полюса и удаленным от полюса дальше, чем вы.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 2)

16. Покажем, что n не может быть больше четырех. Предположим, что нам удалось расставить на доске 5 королей, 5 слонов и 5 ферзей (вместо ферзей можно взять даже ладьи). Все ферзи должны стоять на разных горизонталях и вертикалях, поэтому остаются свободными лишь 9 клеток, лежащих в пересечении оставшихся трех горизонталей и трех вертикалей, а поставить нужно 10 фигур.
Расстановка 4 королей, 4 слонов и 4 ферзей указана на рисунке 4.

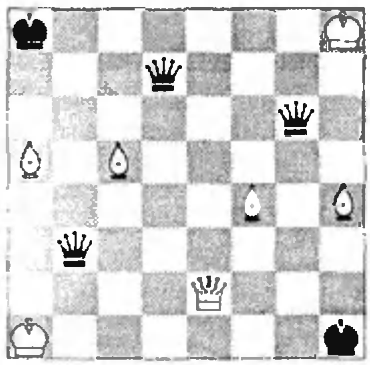


Рис. 4

17. Такой набор существует: например, числа 1995, 2 и еще 1993 единицы. Действительно,

$$1995\cdot2\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1=1995+2+1+1+\ldots+1.$$

18. Выигрывает B. Рядом с таблицей расположим 9 рядов монет. Число монет в ряду равняется числу, записанному в соответствующей клетке (рис.5). Теперь постараемся каждой монете верхнего ряда сопоставить монету следующего ряда. Если монет в верхнем ряду больше, чем в следующем, то несколько монет в верхнем ряду останутся без пары, а если меньше, то без пары останутся несколько монет во втором ряду. В этом случае оставшиеся без пары монеты второго ряда будем соединять с монетами третьего ряда. Вновь возникают те же два случая: либо во втором ряду окажутся монеты без пары, либо все они получат пары. В таком случае переходим к оставшимся монетам третьего ряда и т.д. (рис.6). По завершении этого процесса хотя бы одна монета останется без пары, так как всего монет $1+2+\ldots$ $\ldots+9=45$, т.е. нечетное число. Возьмем самую верхнюю монету, не имеющую пары, и начнем играть, ставя фишку в клетку, соответствующую этому ряду. При этом пометим монету, не имеющую пары. После хода A в соседнюю клетку мы возвраща-

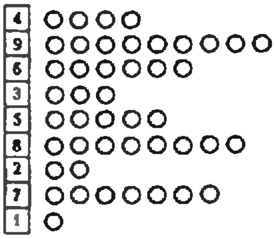


Рис. 5

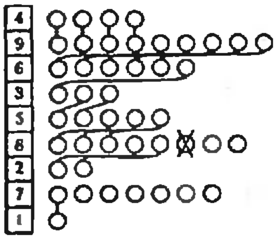


Рис. 6

ется в предыдущую клетку и отмечаем соответствующую пару монет. Таким образом A всегда может вернуться на исходную клетку, т.е. сделать свой очередной ход.

19. Начертим окружность с центром в точке A и радиусом BC, окружность с центром в точке B и радиусом AC, окружность с центром в точке C и радиусом AB. Построим теперь окружность, касающуюся внешним образом этих трех окружностей (рис.7). Ее центр M и есть искомая точка.

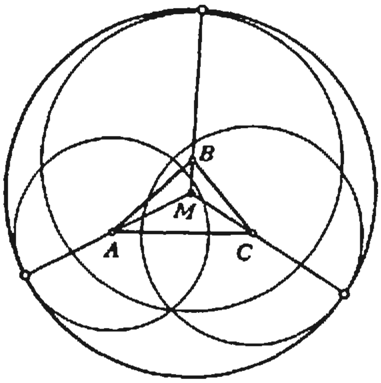


Рис.7

20. Требуется не меньше 16 вопросов. Рассмотрим 16 квадратов размером 5×5, центры которых отмечены на рисунке 8. Нетрудно убедиться, что любые две клетки таблицы будут входить в разные наборы таких квадратов и поэтому все числа могут быть однозначно восстановлены.

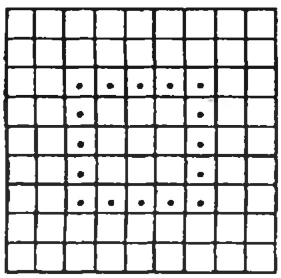


Рис.8

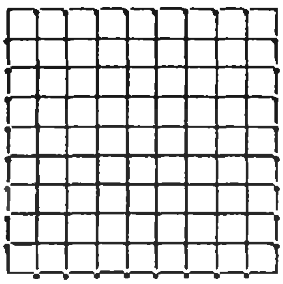


Рис.9

Покажем, что меньше чем за 16 вопросов нельзя восстановить расстановку. Рассмотрим 32 точки, указанные на рисунке 9, которые расположены на границе большого квадрата. Каждая из этих точек должна быть вершиной хотя бы одного из названных квадратов, иначе числа, расположенные в клетках с общей вершиной в этой точке, будут входить в один и тот же набор названных квадратов. Но любой из названных квадратов может иметь своими вершинами не более двух из этих точек. Поэтому должно быть задано не менее чем $32:2=16$ вопросов.

Ядерная физика в задачах

1. $\frac{\Delta N_1}{N_0}=1-2^{-2/3}\approx0{,}37$; $\frac{\Delta N_2}{N_0}=1-2^{-4/3}\approx0{,}61$.

2. $E_T=\frac{m_\alpha}{m_T+m_\alpha}\Delta E=\frac{4}{7}\Delta E\approx2{,}74$ МэВ;

$E_\alpha=\Delta E-E_T=\frac{3}{7}\Delta E\approx2{,}06$ МэВ.

3. $E_n=\frac{m_\alpha}{m_n+m_\alpha}\left(\Delta E+\frac{m_\alpha-m_D}{m_\alpha}E_D\right)\approx14{,}9$ МэВ.

4. $\Delta m_{^3_2\mathrm{He}}=\Delta m_{^3_1\mathrm{H}}+\frac{E_1-E_2}{c^2}\approx0{,}009$ а.е.м.

5. $v_\alpha=\frac{E_\gamma c}{E_\alpha}\approx1{,}58\cdot10^3$ км/с.

Экзамен — выпускной и... вступительный

1. б) $x=2$; $\frac{1}{2\sqrt2}$; $\frac18$; $\frac{1}{\sqrt2}$. в) Поскольку функция $t+1-\frac{1}{t+1}$ монотонна на $[0;\ +\infty]$, то и данная функция монотонна на $[1;\ +\infty]$. Следовательно, если $f(x)=f(x^*)$, то $x=x^*$, откуда $x=1$. г) $0<|a|<\frac{2}{3\sqrt3}$.

2. а) $x=\frac{\pi k}{2}$; $\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$. б) $-\frac23+4k<a<\frac23+4k$, $k\in Z$. в) $|a|<\frac23$. г) $a=0$.

3. а) $a\ge1$. б) $y=\frac12(x-5)$, $y=\frac23(x-5)$. в) $x<-1$, $x=2+2\sqrt2$. г) $x_0=\frac12$.

4. б) Нет, не существует. г) $\frac{\pi}{3}$.

5. б) См. рис.10. в) $z=1$, треугольник произволен.

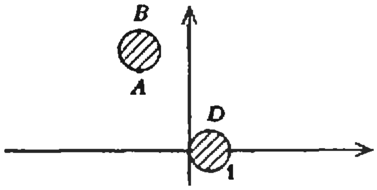


Рис. 10

г) Да, верно. Множество точек указанного в задаче вида, как следует из рассуждения пункта б, является кругом с диаметром $[z_k z_j]$. Три круга, построенные на отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, накрывают этот треугольник хотя бы потому, что он тупоугольный.

XXI Российская олимпиада школьников по математике

Зональный этап

9 класс

1. Воспользуйтесь тем, что $x^4+y^2\ge2x^2y$, а $y^4+x^2\ge2y^2x$.

2. Ответ: нельзя.

Допустим, что нашлись числа a_1, a_2, ..., a_{1995}, которые можно расставить требуемым образом. Пусть число a_k ($k=1, 2, ...$ ..., 1995) представляется в виде произведения $n(k)$ простых сомножителей (не обязательно различных). Так как любые два соседние числа отличаются друг от друга одним простым множителем, то для любого $k=1, 2, ..., 1994$ числа $n(k)$ и $n(k+1)$ отличаются на единицу, т.е. имеют разную четность. Значит, числа $n(1)$, $n(3)$, ..., $n(1995)$ должны быть одной четности. С другой стороны, числа a_{1995} и a_1 также соседние, поэтому $n(1995)$ и $n(1)$ должны иметь разную четность. Получили противоречие.

3. Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, ρ — радиус окружности, описанный около треугольника ABC. Тогда, по теореме синусов, $AC = 2R\sin\alpha = 2\rho\sin\beta$, а $BC = 2r\sin\beta = 2\rho\sin\alpha$. Перемножая полученные равенства, получим, что $\rho^2\sin\alpha\sin\beta = Rr\sin\alpha\sin\beta$, или $\rho^2 = Rr$.

4. Ответ: нет. Допустим, что требуемая раскраска возможна. Рассмотрим отрезки какого-либо одного цвета, например красного. Общее число треугольников, одна из сторон которых красная, равно числу пар из 11 остальных цветов, т.е. $\frac{11\cdot 10}{2} = 55$. Так как каждый красный отрезок служит стороной для десяти треугольников, то число красных отрезков не меньше шести. Но тогда и число отрезков любого другого цвета не меньше шести, а общее число отрезков должно быть, следовательно, не меньше $12\cdot 6 = 72$. Однако число всех сторон и диагоналей в 12-угольнике равно $\frac{12\cdot 11}{2} = 66 < 72$. Полученное противоречие показывает, что требуемая раскраска невозможна.

5. Ответ: $p = 3$.

Заметим, что $p^2 + 11 = (p-1)(p+1) + 12$. Если простое число $p \ge 5$, то произведение $(p-1)(p+1)$ делится на 12, но тогда $p^2 + 11$ также делится на 12, а значит, имеет не менее семи делителей (6 делителей числа 12 и само число $p^2 + 11 > 12$). Осталось проверить простые $p = 2$ и $p = 3$.

6. Отрезки AO_1 и O_1D равны как радиусы окружности S_1 (рис.11). Поэтому равны стягиваемые хордами AO_1 и O_1D

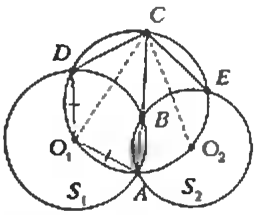


Рис. 11

дуги AO_1 и O_1D окружности, проходящей через точки O_1, O_2 и A. Значит, углы ACO_1 и DCO_1 равны как вписанные, опирающиеся на равные дуги. Следовательно, лучи CA и CD, как и окружность S_1, симметричны относительно прямой CO_1. Поэтому точки B и D (ближайшие к C точки пересечения лучей CA и CD с окружностью S_1) также симметричны относительно CO_1, т.е. $CB = CD$. Аналогично, $CE = CB$.

7. Общее количество узлов равно 91. Каждый узел, за исключением центрального, принадлежит одной из одиннадцати концентрических окружностей с центром в центре шестиугольника (рис.12).

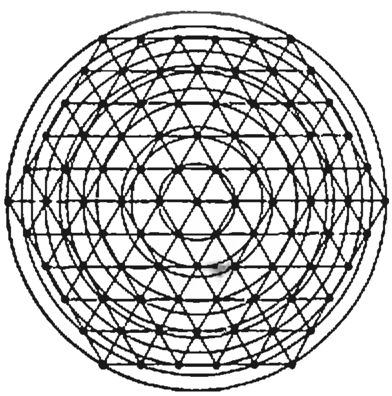


Рис. 12

Предположим, что не существует пяти отмеченных узлов, лежащих на одной окружности. Тогда каждая из одиннадцати рассматриваемых окружностей содержит не более четырех отмеченных узлов, а общее количество отмеченных узлов не больше $11\cdot 4 + 1 = 45$, т.е. не более половины. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно.

8. Ответ: нет.

Допустим, что такая расстановка возможна. Заметим, что столбец точных квадратов не может быть ни первым, ни последним, так как у точных квадратов 20 «соседних» чисел, а в одном соседнем столбце можно уместить только 11 чисел. Таким образом, после удаления столбца точных квадратов таблица распадается на две непустые части, в каждой из которых число клеток кратно 11. Группа чисел между двумя последовательными квадратами попадает в одну из этих частей, при этом числа $m^2 - 1$ и $m^2 + 1$ попадают в разные части, поэтому такие группы чисел попеременно попадают то в одну часть таблицы, то в другую. Между m^2 и $(m+1)^2$ имеется $2m$ чисел. Следовательно, в одну из частей попадет $2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50$ чисел. Так как 50 не кратно 11, то требуемая расстановка невозможна.

10 класс

1. Ответ: $\sqrt[3]{1-\frac{1}{19^3}}$. Указание. $f(f(f(x))) = x$ при $x \ne 0$, $x \ne 1$.

2. Положим $m = kd$, $n = ld$, где $d = \text{НОД}(m,n)$. Тогда $\text{НОК}(m,n) = kld$ и, значит, $kld + d = kd + ld$. Отсюда получаем, что $(k-1)(l-1) = 0$, т.е. $k = 1$ или $l = 1$. Это означает, что либо m, либо n равно $\text{НОД}(m,n)$. Следовательно, либо n делится на m, либо m делится на n.

3. Достаточно доказать аналогичное утверждение для произвольной окружности, гомотетичной S с центром гомотетии B. Рассмотрим окружность S' с диаметром BH, где H — ортоцентр треугольника ABC. Пусть она пересекает стороны AB и

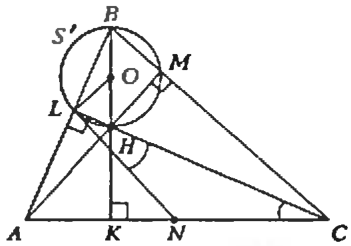


Рис. 13

BC в точках L и M (рис.13). Тогда CL и AM — высоты треугольника ABC. Докажем, что LN (N — середина AC) — касательная к S'. Если O — центр окружности S', то $LO = BO$, и поэтому $\angle BLO = \angle LBO = 90°$. Так как точка N — середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ALC, то $LN = CN$ и, значит, $\angle CLN = \angle CLN = 90° - \angle A = \angle BLO$. Следовательно, $\angle OLN = \angle BLN - \angle BLO = \angle BLN - \angle CLN = \angle BLC = 90°$, т.е. LN — касательная. Аналогично доказывается, что MN также является касательной к окружности S'.

4. Рассмотрим в плоскости стола различные системы координат, у которых оси параллельны краям стола, а за единицу длины принята длина стороны бумажного квадрата. Выберем какую-нибудь одну из них так, чтобы у вершин каждого из данных квадратов ни одна из координат не была бы целым числом. Отметим теперь точки с целыми координатами, накрытые хотя бы одним из листов. Очевидно, что каждый лист накрывает ровно одну такую точку. Достаточно, следовательно, воткнуть булавки во все отмеченные точки.

5. Ответ: 3. Из условия следует, что $a > 0$ и $b^2 - 4ac \le 0$, т.е. $c \ge \frac{b^2}{4a}$. Обозначим $A = \frac{a+b+c}{b-a}$. Тогда, поскольку $x = b - a > 0$, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$A \ge \frac{a+b+\dfrac{b^2}{4a}}{b-a} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)} = \frac{9a^2+6ax+x^2}{4ax} =$$

$$= \frac{3}{2}+\frac{9a^2+x^2}{4ax} \ge \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{9a^2\cdot x^2}}{2ax} = \frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 3,$$

причем равенство $A = 3$ достигается, если $c = \frac{b^2}{4a}$ и $x = 3a$, т.е. при $b = c = 4a$.

Следовательно, данное выражение принимает свое наименьшее значение, равное трем, когда $f(x) = ax^2 + 4ax + 4a = a(x+2)^2$, где a — произвольное положительное число.

Замечание. Пусть $g(t) = \frac{(t+2)^2}{4(t-1)}$. Нетрудно проверить, что $g\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$. Следовательно, наименьшее значение A можно найти, исследовав функцию $g(t)$ на экстремум при $t > 1$.

6. Обозначим $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{DE} = \vec{c}$ и $\vec{BF} = \vec{d}$ (рис.14).

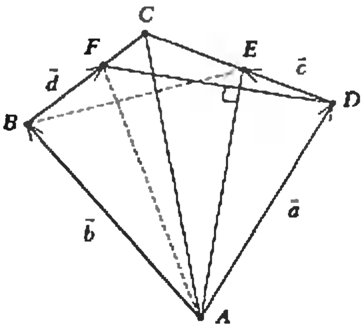


Рис. 14

Тогда $\vec{DF} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{a}$, $\vec{AE} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{AF} = \vec{b} + \vec{d}$, $\vec{BE} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$. По условию $DF \perp AE$ и $AD \perp DE$, поэтому

$$\left(\vec{b}+\vec{d}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right) = 0, \quad \left(\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right) - \left|\vec{a}\right|^2 = 0.$$

Так как $AB \perp BF$, то

$$\vec{AF}\cdot\vec{BE} = \left(\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right) = \left(\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right) - \left|\vec{b}\right|^2.$$

Отсюда в силу условия $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ следует, что $\vec{AF}\cdot\vec{BE} = 0$, т.е. $AF \perp BE$.

7. Выберем в ожерелье какой-нибудь кубик и отметим его номером 1. Затем занумеруем остальные кубики по порядку, двигаясь вдоль нити в одном из двух возможных направлений. В кубике с номером n обозначим через n_1 ту вершину, которая примыкает к предыдущему кубику, а через n_2 — вершину, примыкающую к следующему кубику (рис.15). Так как ожерелье замкнутое, то первый кубик следует за N^3-м.

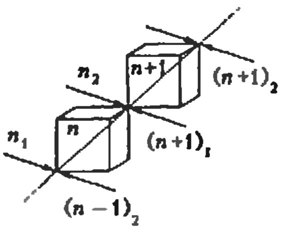


Рис. 15

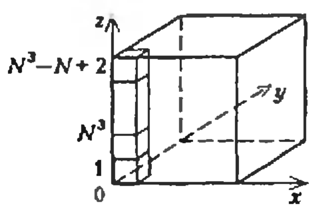


Рис. 16

а) Докажем, что при четном N требуемая упаковка возможна. Выберем систему координат, направив оси вдоль ребер коробки и взяв в качестве единицы длины ребро кубика (рис.16). Составим столбец высотой N из кубиков с номерами 1, N^3, N^3-1, ..., N^3-N^2+2, поместив вершину 1_1 в точку с координатами (1,0,1), а вершину 1_2 в точку с координатами (0,1,0). Заметим, что последняя вершина этого столбца, т.е. $(N^3-N^2+2)_1$, имеет координаты $(0,1,N)$. Оставшиеся N^3-N кубиков будем укладывать послойно в виде «змеек».

1) Первый (нижний) слой — рис.17. В клетках проставлены номера кубиков. Укладывать слой начинаем с кубика 2.

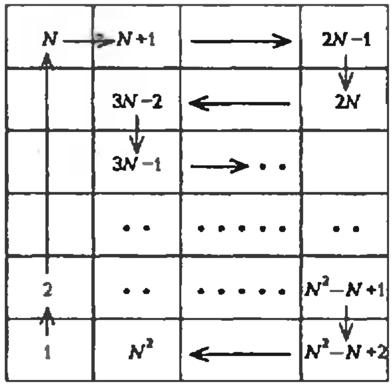


Рис. 17

Вершина $(N^3)_2$ имеет координаты (1,0,1), т.е. $(N^3)_2 = 1_1$.

2) Второй слой — рис.18. Здесь вершины $(2N^2-1)_2$ и $(N^3)_1$ имеют координаты (0,1,2), т.е. $(2N^2-1)_2 = (N^3)_1$.

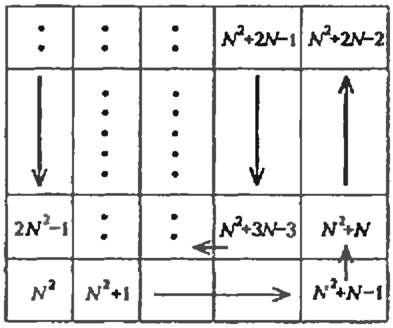


Рис. 18

3) В третьем слое расположение кубиков с номерами $2N^2$, ..., $3N^2-2$ повторяет расположение кубиков с номерами 2, ..., N^2 в первом слое, и т.д.

Заметим, что в каждом слое координаты вершины «1» кубика из столбца совпадают с координатами вершины «2» последнего кубика из змейки. Следовательно, в N-м слое координаты вершин $(N^3-N+2)_1$ и $(N^3-N+1)_2$ совпадают. Что и требовалось доказать.

б) Если ожерелье упаковано в коробку, то вершины «1» и «2» любого кубика имеют различные по четности абсциссы. Значит, сумма этих двух координат для каждого кубика — нечетное число. Следовательно, в случае $N = 2k+1$ сумма всех абсцисс отмеченных вершин — также нечетное число. Но каждая абсцисса повторяется дважды: для n_2 и для $(n+1)_1$. Значит, указанная сумма должна быть четной. Таким образом, при нечетном N упаковать ожерелье в коробку невозможно.

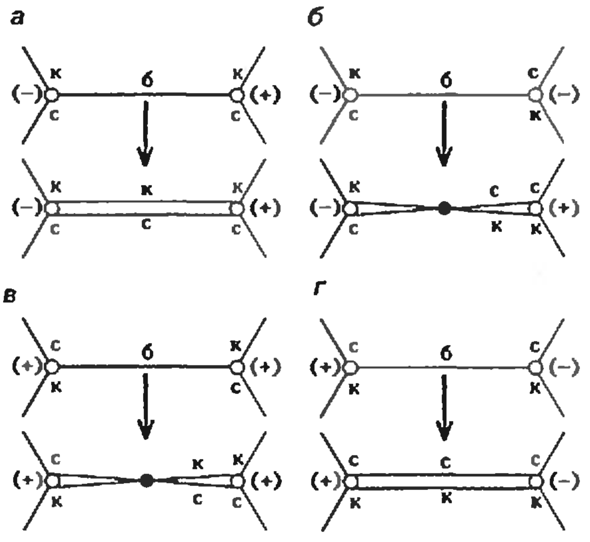


Рис. 19

8. Заменим каждую белую улицу города на две — синюю и красную, соединив синим цветом концы синих улиц, соседних с белой, а красным цветом — концы соседних с ней красных улиц (рис.19). В соответствии с рисунками *а*) – *г*) будем называть белые улицы улицами типов *а*), *б*), *в*) и *г*), а их количества обозначим соответственно $n_а$, $n_б$, $n_в$ и $n_г$. В случаях *б*) и *в*), будем считать, что красная и синяя улицы, которыми мы заменили белую, пересекаются в точке, отличной от вершин ломаных, которыми являются эти улицы. Теперь все синие улицы образуют несколько многоугольников. Назовем их синими. Аналогично, красные улицы образуют несколько красных многоугольников. Ясно, что границы двух многоугольников разного цвета либо не пересекаются, либо пересекаются в четном числе точек (если границы пересекаются, то граница одного из многоугольников входит внутрь второго столько же раз, сколько и выходит из него). Но число точек пересечения границ многоугольников разного цвета равно числу белых улиц типов б) и в), т.е. $n_б + n_в$. Значит, число $n_б + n_в$ — четное.

Остается заметить, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков равна $2(n_б - n_в) = 2(n_б + n_в) - 4n_в$, и, следовательно, кратна четырем.

11 класс

2. Достроим шестиугольник до правильного треугольника (рис.20). Вершины K, L и M этого треугольника лежат на продолжениях ребер AB, AA_1 и AD параллелепипеда. Из равенства прямоугольных треугольников KLA и MLA ($KL = LM$, AL — общий катет) следует, что $KA = MA$. Аналогично,

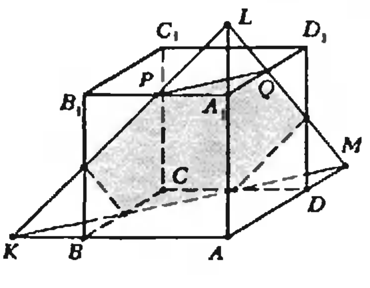


Рис. 20

$KA = LA$. Так как $PQ = \frac{1}{3}KM$, то из подобия треугольников LPQ и LKM, LPA_1 и LKA следует, что $AA_1 = \frac{2}{3}AL$. Аналогично, $AB = \frac{2}{3}AK$ и $AD = \frac{2}{3}AM$. Итак, $AB = AA_1 = AD$ и, значит, параллелепипед — куб.

Замечание. Если параллелепипед не прямоугольный, то он может и не быть кубом. Например, можно рассмотреть параллелепипед, получаемый «вытягиванием» куба вдоль его большой диагонали, и перпендикулярное этой диагонали сечение.

4. Доказательство проведем по индукции. Пусть $k = 1$. Тогда $2k - 1 = 1$, и каждые два квадрата имеют общую точку. Проведем самую правую и самую левую вертикальные прямые, а также самую верхнюю и самую нижнюю горизонтальные прямые, содержащие стороны квадратов. Эти четыре прямые образуют прямоугольник с длинами сторон не более $2a$, где a — длина стороны квадрата. (Если бы длина какой-то стороны была больше $2a$, то квадраты, примыкающие к смежным с ней сторонам прямоугольника, не пересекались бы.) Следовательно, все квадраты содержат центр прямоугольника, т.е. имеют общую точку.

Предположим, что утверждение доказано для $k = n - 1$. Выберем самый левый квадрат K_0 (или один из них, если их несколько) и разобьем все множество квадратов на два подмножества M_1 и M_2. В M_1 содержатся квадраты, пересекающиеся с квадратом K_0, в M_2 — не пересекающиеся с ним. Множество M_1, в свою очередь, разобьем на два подмножества: первое составляют квадраты, содержащие правую верхнюю вершину K_0, второе — квадраты, содержащие правую нижнюю вершину K_0. Множество M_2 содержит не более $n - 1$ попарно непересекающихся квадратов (так как K_0 не пересекается с квадратами из M_2), поэтому по предположению индукции M_2 можно разбить не более чем на $2(n-1) - 1$ подмножеств, в каждом из которых квадраты имеют общую точку. Так как множество M_1 разбито на 2 требуемых подмножества, то исходное множество разбивается не более чем на $2 + 2(n - 1) - 1 = 2n - 1$ искомых подмножеств.

5. Пусть $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > \sqrt{5}$. Тогда для векторов $\vec{a} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$, $\vec{b} = (\sin\beta, \cos\beta)$ и $\vec{c} = (\sin\gamma, \cos\gamma)$ имеем $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 > 4 + 5 = 9$ и $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = 3$. Получили противоречие.

Замечание. Сумму $A = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2$ легко оценить сверху:

$$A = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) +$$

$$+ (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) +$$

$$+ 2(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma) +$$

$$+ 2(\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma) \le 3 + 3 \cdot 2 = 9.$$

Отсюда

$$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 = A - (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 \le 9 - 4 = 5.$$

6. **Ответ:** 1995^2.

Полагая $m = n$, находим $a_0 = 0$. Полагая $n = 0$, получим $a_m + a_m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_0)$. Отсюда

$$a_{2m} = 4a_m. \qquad (1)$$

Пусть $m = n + 2$. Тогда $a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(a_{2n+4} + a_{2n})$, и так как в силу (1) $a_{2n+4} = 4a_{n+2}$ и $a_{2n} = 4a_n$, то окончательно получаем

$$a_{2n+2} + a_2 = 2(a_{n+2} + a_n). \qquad (2)$$

С другой стороны, в силу (1) и условия $a_1 = 1$ имеем

$$a_{2n+2}+a_2=4\left(a_{n+1}+a_1\right)=4\left(a_{n+1}+1\right). \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), заключаем, что последовательность (a_n) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$$

с начальными условиями $a_0=0$, $a_1=1$.
Вычислив несколько первых членов последовательности: $a_2=4$, $a_3=9$, $a_4=16$, приходим к предположению, что $a_n=n^2$ при всех $n\geq 0$ Доказательство проведем по индукции. При $n=0$ и $n=1$ утверждение верно. Пусть оно верно при $n=k-1$ и $n=k$ ($k\geq 1$). Тогда

$$a_{k+1}=2a_k-a_{k-1}+2=2k^2-(k-1)^2+2=(k+1)^2,$$

т.е. утверждение верно и при $n=k+1$.
Следовательно, $a_{1995}=1995^2$.

7. Заметим, что ΔO_1BE и ΔO_2BF — подобные равнобедренные треугольники, а точки E, F, O_1 и O_2 лежат на одной окружности S. Поскольку $\angle O_1AO_2+\angle O_1EB=\angle O_1BO_2+\angle O_1BE=180^\circ$, на той же окружности лежит и точка A (рис.21).
Углы FEB и BEA равны как вписанные в окружность S и

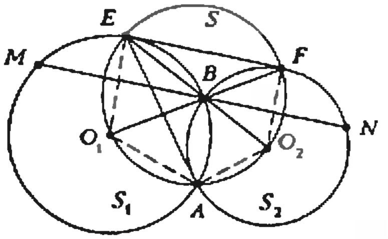


Рис. 21

опирающиеся на равные дуги O_2F и O_2A. Из параллельности прямых EF и MN вытекает, что $\angle MBE=\angle FEB$. Следовательно, $\angle MBE=\angle BEA$, и $MEBA$ — равнобедренная трапеция. Отсюда $AE=MB$. Аналогично доказывается, что $ABFN$ — равнобедренная трапеция, поэтому $AF=BN$.
Складывая два полученные равенства, получаем, что $AE+AF=MB+BN=MN$.

Заключительный этап

9 класс

1. Ответ. 0 или 12. *Указание.* $z=x+y$.

2. Докажем более общее утверждение: если хорда AE пересекает радиус OC в точке M, а хорда DE — хорду BC в точке N, то $\frac{CM}{CO}=\frac{CN}{CB}$. (В условии задачи $CN/CB=1/2$.)

Заметим, что дуги AC и AD (см. рис.22) симметричны относительно прямой AB и, следовательно, равны. Поэтому равны и углы AEC и AED, вписанные в окружность и опирающиеся на

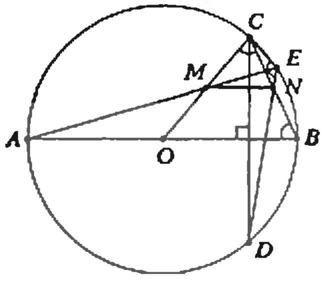


Рис. 22

эти дуги. Углы AEC и ABC равны как вписанные, опирающиеся на дугу AC, а углы ABC и OCB равны, так как треугольник OCB равнобедренный. Следовательно, $\angle AED=\angle OCB$, т.е. $\angle MEN=\angle MCN$, а это означает, что точки M, N, E и C лежат на одной окружности. Поэтому $\angle MNC=\angle MEC=\angle OBC$. Следовательно, треугольники MNC и OBC подобны, а значит, $\frac{CM}{CO}=\frac{CN}{CB}$.

4. Ответ: можно.

Покажем, как построить пример такой таблицы.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5

Рис. 23

Таблица T, изображенная на рисунке 23, содержит по девять раз каждое из чисел 0, 1, ..., 8 и обладает тем свойством, что сумма чисел в любом квадрате 3×3 равна 36. Ясно, что таблица Q, получаемая из нее поворотом на 90°, также обладает указанными свойствами. Заметим теперь, что одинаковым числам таблицы T соответствуют различные числа таблицы Q, поэтому существует взаимно однозначное соответствие между клетками таблицы 9×9 и парами $(a;b)$, где a, $b=0, 1, 2, \ldots, 8$. Теперь можно взять новую таблицу 9×9 и в ее клетке, соответствующей паре $(a;b)$, записать число $9a+b+1$.

5. Заметим, что $459+495=954$, а число 1995 делится на 3.

Поэтому искомыми будут, например, числа $\underbrace{\overbrace{459}\overbrace{459}\ldots\overbrace{459}}_{665\ \text{троек}}$, $\underbrace{\overbrace{495}\overbrace{495}\ldots\overbrace{495}}_{665\ \text{троек}}$ и их сумма. Отметим, что 459, 495 и 954 — периоды десятичных разложений дробей $\frac{51}{111}$, $\frac{55}{111}$ и их суммы $\frac{106}{111}$. Вообще, дроби с одинаковыми знаменателями разбиваются на группы дробей с одинаковыми наборами цифр в периоде (подумайте, почему?): $\frac{2}{13}=0,(153846)$, $\frac{5}{13}=0,(384615)$, $\frac{7}{13}=0,(538461)$ (таким образом, $153846+384615=538461$); $\frac{1}{13}=0,(076923)$, $\frac{3}{13}=0,(230769)$ и т.п. Добавлением к периодам из одной группы необходимого числа девяток можно получить другие тройки искомых похожих чисел. Например:

$$15384\underbrace{99\ldots9}_{1989}6+38461\underbrace{99\ldots9}_{1989}5=53846\underbrace{99\ldots9}_{1989}1.$$

6. Ответ: 180°. *Указание.* Пусть M — середина стороны AB. Докажите, что точки M, A_2, H и B_2 лежат на окружности с центром в середине отрезка MH. На той же окружности лежит и точка C_1. Поэтому $\angle A_2MB_2=A_2C_1B_2=\angle ACB$. Аналогично, $\angle B_2A_1C_2=\angle BAC$, а $\angle C_2B_1A_2=\angle CBA$.

Замечание. Другое решение задачи основано на следующих соображениях: треугольники A_1CC_1 и A_1B_1B подобны, поэтому существует поворотная гомотетия с центром A_1 на угол CA_1B_1, переводящая один из этих треугольников в другой; следовательно, $\angle C_2A_1B_2 = \angle B_1A_1C$, так как при этой поворотной гомотетии середина отрезка CC_1 перейдет в середину отрезка B_1B; аналогично, $\angle B_2C_1A_2 = \angle A_1C_1B$ и $\angle A_2B_1C_2 = \angle C_1B_1A$; суммируя углы треугольников CA_1B_1, BC_1A_1 и AB_1C_1, получаем, что $\angle B_1A_1C + \angle A_1C_1B + \angle C_1B_1A = 180°$, откуда и следует доказываемое утверждение.

8. Сумма всех чисел в таблице неотрицательна, поэтому найдется строка, содержащая не менее 1000 единиц. Переставим столбцы таблицы так, чтобы в первых 1000 клетках этой строки стояли 1. Обозначим через A и B прямоугольники 2000×1000, образованные соответственно первыми 1000 и последними 1000 столбцами таблицы.

Пусть A_1 — 1000 строк прямоугольника A с наибольшими суммами записанных в них чисел, A_2 — остальные 1000 строк. Если сумма чисел в A_1 не меньше 1000, то утверждение задачи доказано.

Допустим, что сумма чисел в A_1 меньше 1000. Покажем, что тогда в каждой строке из A_2 сумма чисел отрицательна. Действительно, если хотя бы в одной из строк из A_2 сумма неотрицательна, то и во всех строках из A_1 она неотрицательна. Кроме того, одна из строк A_1 вся состоит из 1, следовательно, сумма всех чисел в A_1 не меньше 1000. Противоречие. Отсюда следует, что сумма чисел в каждой строке из A_2 не больше чем -2, так как сумма чисел в любой строке четна. Значит, сумма чисел во всем прямоугольнике A меньше чем $1000+(-2)\cdot1000$, т.е. меньше -1000. Но по условию сумма чисел во всей таблице неотрицательна. Следовательно, сумма чисел в прямоугольнике B больше 1000. Пусть B_1 — 1000 строк прямоугольника B с наибольшими, а B_2 — 1000 строк с наименьшими суммами записанных в них чисел. Докажем, что сумма чисел в B_1 не меньше 1000. Это верно, если сумма чисел в каждой строке из B_2 неположительна. Если же хотя бы в одной строке из B_2 сумма чисел положительна, то она положительна и в каждой строке из B_1. Утверждение задачи доказано.

10 класс

1. **Ответ:** корней нет.

Покажем, что при всех $x\in R$ справедливо неравенство

$$\cos\cos\cos\cos x > \sin\sin\sin\sin x. \qquad (1)$$

Достаточно это доказать для $x\in[0;2\pi]$. Если $x\in[\pi;2\pi]$, то утверждение очевидно: $\cos\cos\cos\cos x>0$, а $\sin\sin\sin\sin x\le 0$. Пусть $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда каждое из чисел $\cos x$, $\sin x$, $\cos\cos x$, $\sin\sin x$, $\cos\cos\cos x$, $\sin\sin\sin x$ неотрицательно и не превосходит 1. Так как всегда $\sin x+\cos x\le\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$, то для рассматриваемых значений x выполняются неравенства $0\le\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin x$. Следовательно,

$$\cos\cos x>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)=\sin\sin x \qquad (2)$$

и

$$\sin\cos x<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)=\cos\sin x. \qquad (3)$$

Из (2) получаем, что $\cos\cos\cos x<\cos\sin\sin x$, поэтому $\cos\cos\cos x+\sin\sin\sin x<\cos(\sin\sin x)+\sin(\sin\sin x)<\frac{\pi}{2}$, откуда $\cos\cos\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin\sin\sin x$, и, следовательно, $\cos\cos\cos\cos x>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin\sin\sin x\right)=\sin\sin\sin\sin x$.

Пусть $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Положим $y=x-\frac{\pi}{2}$, тогда $y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, и неравенство (1) принимает вид

$$\cos\cos\cos\sin y>\sin\sin\sin\cos y. \qquad (1')$$

Так как при $y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ каждое из чисел $\cos\sin y$ и $\sin\cos y$ также принадлежит интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то в силу (2) получаем, что $\cos\cos(\cos\sin y)>\sin\sin(\cos\sin y)$. Функция $\sin\sin t$, $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, является возрастающей, поэтому в силу (3) имеем $\sin\sin(\cos\sin y)>\sin\sin(\sin\cos y)$. Неравенство (1') (а вместе с ним и неравенство (1)) доказано.

4. Первое решение. Пусть A_nA_1 — самая короткая (если их несколько, то одна из них) сторона многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ с равными углами. Тогда $A_nA_1\le A_1A_2$ и $A_nA_1\le A_{n-1}A_n$. Предположим, что многоугольник не имеет других, кроме A_nA_1, сторон, не превосходящих соседних с ними. Пусть A_mA_{m+1} — самая длинная сторона многоугольника (считаем при этом, что $A_{n+1}=A_1$). Тогда $A_1A_2<A_2A_3<\ldots<A_mA_{m+1}$, так как если $A_{k-1}A_k\ge A_kA_{k+1}$, то наименьшая среди сторон A_kA_{k+1}, ..., $A_{m-1}A_m$ не длиннее соседних с ней. Аналогично $A_nA_1<A_{n-1}A_n<\ldots<A_{m+1}A_{m+2}<A_mA_{m+1}$. Отложим векторы $\vec{A_iA}_{i+1}$, $i=1,\ldots,n$, от одной точки: $\vec{OB_i}=\vec{A_iA}_{i+1}$ (рис.24). Тогда $\vec{OB_1}+\ldots+\vec{OB_n}=\vec{A_1A_2}+\ldots+\vec{A_nA_1}=\vec{0}$, и, следовательно, сумма проекций $\vec{OC_i}$, $i=1,\ldots,n$, этих векторов на любую прямую l_1 равна $\vec{0}$.

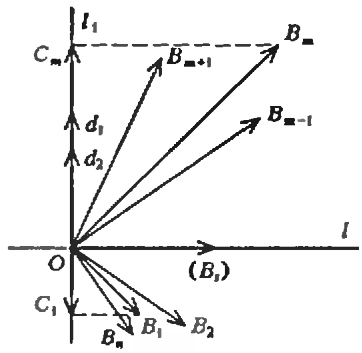


Рис. 24

Возьмем в качестве l_1 прямую, перпендикулярную биссектрисе l угла B_1OB_m. Из условия следует, что $\angle B_1OB_2=\ldots$ $\ldots=\angle B_{m-1}OB_m=\frac{2\pi}{n}$, поэтому пары лучей с началом в точке O OB_1 и OB_m, OB_2 и OB_{m-1}, ... симметричны относительно прямой l. Для нечетного m, $m=2s+1$, без пары останется луч OB_s, лежащий на l. Соответственно, векторы $\vec{OC_i}$, $i=1,\ldots,m$, разобьются на пары противоположно направленых векторов, причем $OC_1<OC_m$, $OC_2<OC_{m-1}$, ... (если $m=2s+1$, то $\vec{OC_s}=\vec{0}$). Таким образом, $\vec{OC_1}+\ldots+\vec{OC_m}=\vec{d_1}$, $\vec{OC_n}+\vec{OC}_{n-1}+\ldots+\vec{OC}_{m+1}=\vec{d_2}$, где векторы $\vec{d_1}$ и $\vec{d_2}$ направлены вверх и хотя бы один из них ненулевой. Но тогда $\vec{OC_1}+\ldots+\vec{OC_n}=\vec{d_1}+\vec{d_2}\ne\vec{0}$. Противоречие, следовательно, найдется отличная от A_nA_1 сторона многоугольника, не превосходящая соседние с ней стороны.

Второе решение. Как и выше, предположив противное, получаем, что $A_nA_1<A_1A_2<\ldots<A_mA_{m+1}$ и $A_nA_1<A_{n-1}A_n<\ldots$ $\ldots<A_mA_{m+1}$. Проведем биссектрисы всех углов многоугольника. Пусть O_i — точка пересечения биссектрис, выходящих из вершин A_i и A_{i-1} (считаем $A_0=A_n$) (рис.25). Тогда из условия равенства углов многоугольника следует, что, при всех $i=1,\ldots,n$, $\angle A_{i-1}O_iA_i=\beta=\frac{2\pi}{n}$. В подобных треугольниках $A_nO_1A_1$, $A_1O_2A_2$, ..., $A_mO_{m+1}A_{m+1}$ выполняются соотношения $A_nO_1=A_1O_1<A_1O_2=A_2O_2<A_2O_3\ldots$, так как $A_nA_1<A_1A_2\ldots$ и, следовательно, точка O_1 лежит внутри отрезка A_1O_2, O_2 — внутри отрезка A_2O_3 и т.д. Отсюда следует, что $\angle A_nO_2A_1<$

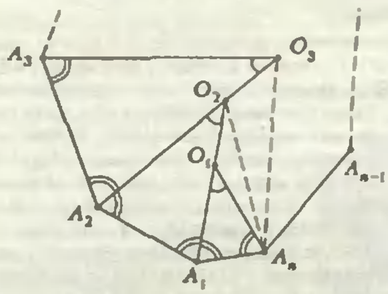


Рис. 25

$\angle A_nO_1A_1 = \beta$, поэтому $\angle A_nO_2A_2 = \angle A_nO_2A_1 + \angle A_1O_2A_2 < 2\beta, \ldots, \angle A_nO_{m+1}A_{m+1} < (m+1)\beta$. Аналогично, двигаясь против часовой стрелки, получаем, что $\angle A_nO_nA_{n-1} = \beta$, $\angle A_nO_{n-1}A_{n-2} < 2\beta, \ldots, \angle A_nO_{m+1}A_m < (n-m)\beta$. Таким образом, $\angle A_nO_{m+1}A_{m+1} + \angle A_nO_{m+1}A_m < (m+1)\beta + (n-m)\beta = (n+1)\beta$, т.е. $2\pi + \angle A_mO_{m+1}A_{m+1} < (n+1)\beta$. Получили противоречие, так как $\angle A_mO_{m+1}A_{m+1} = \beta$ и $n\beta = 2\pi$.

5. Так как каждое a_i делится на $(a_i, a_{2i}) = (i, 2i) = i$, то a_i делится на i для всех $i \in N$. Предположим, что при некотором i выполняется неравенство $a_i > i$. Тогда, с одной стороны, $(a_{a_i}, a_i) = (a_i, i) = i$, а с другой стороны, поскольку a_{a_i} делится на a_i, то $(a_{a_i}, a_i) = a_i > i$. Получили противоречие.

6. Пусть O_1 и O_2 — центры, OP и OQ — диаметры окружностей ω_1 и ω_2, соответственно, описанных около треугольников AOC и DOB (рис.26). Отрезок O_1O_2 перпендикулярен общей хорде OK этих окружностей и делит ее пополам. В то же время O_1O_2 является средней линией треугольника POQ. Поэтому прямая PQ проходит через точку K и перпендикулярна OK. Таким образом, достаточно доказать, что точка M лежит на прямой PQ.

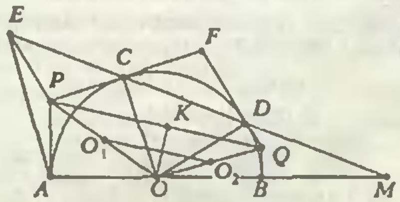


Рис. 26

Так как OP — диаметр окружности ω_1, угол PAO — прямой, а PA — касательная к полуокружности. Аналогично, PC, QB и QD — тоже касательные к полуокружности. Пусть F — точка пересечения прямых PC и QD, а E — точка пересечения прямой CD с прямой, проходящей через P и параллельной OD. Тогда из равенства $FC = FD$ следует, что $\angle QDM = \angle FDC = \angle FCD = \angle PCE$. Но $\angle QDM = \angle PEM$ ($PE \parallel QD$). Итак, $PE = PC$, но $PC = PA$ и $QB = QD$. Значит, APE и BQD — равнобедренные треугольники с соответственно параллельными сторонами AP и BQ, PE и QD. Поэтому $\angle PAE = \frac{1}{2}(180° - \angle APE) = \frac{1}{2}(180° - \angle BQD) = \angle QBD$ и $AE \parallel BD$. Из сказанного следует, что гомотетия с центром в точке M и коэффициентом MA/MB переводит точку B в точку A, точку D — в точку E, но тогда и точку Q в точку P. Значит, прямая PQ проходит через центр гомотетии — точку M.

11 класс

1. Докажем, что никакие три простых числа не могут входить в одну геометрическую прогрессию. Предположим противное: пусть $p_1 < p_2 < p_3$ — простые числа, $p_1 = aq^k$, $p_2 = aq^l$, $p_3 = aq^m$. Тогда $p_2/p_1 = q^{l-k} = q^s$, $p_3/p_3 = q^{m-l} = q^r$. Отсюда следует, что $p_2^{r+s} = p_1^r \cdot p_3^s$, но это невозможно. Утверждение задачи теперь следует из того, что среди чисел от 1 до 100 содержатся 25 простых чисел.

2. Пусть $f(x)$ — данная функция. Покажем, как ее можно представить в виде суммы функций $f_1(x)$, график которой симметричен относительно прямой $x = 0$, и $f_2(x)$, график которой симметричен относительно прямой $x = a$, $a > 0$. Значения функций f_1 и f_2 мы определим на отрезке $[-a; a]$, затем последовательно на отрезках $[a; 3a]$, $[-3a; -a]$, $[3a; 5a]$ и т.д. На $[-a; a]$ положим $f_1(x) = 0$ (можно в качестве $f_1(x)$ взять и любую четную на $[-a; a]$ функцию, обращающуюся в нуль на концах этого отрезка), а $f_2(x) = f(x) - f_1(x) = f(x)$. На отрезке $[a; 3a]$ определим функцию $f_2(x)$ так, чтобы на $[-a; 3a]$ ее график был симметричен относительно прямой $x = a$, т.е. $f_2(x) = f_2(2a - x)$. Такое определение функции $f_2(x)$ корректно, так как если $x \in [a; 3a]$, то $(2a - x) \in [-a; a]$. Функцию $f_1(x)$ на отрезке $[a; 3a]$ определим равенством $f_1(x) = f(x) - f_2(x)$. На отрезке $[3a; -a]$ положим $f_1(x) = f_1(-x)$, а $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$; на отрезке $[3a; 5a]$ положим $f_2(x) = f_2(2a - x)$, а $f_1(x) = f(x) - f_2(x)$ и т.д.

На рисунке 27 приведен пример такого представления для функции $f(x) = x$.

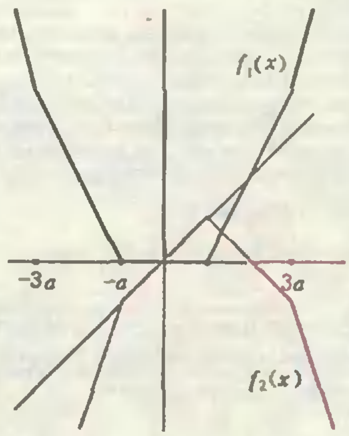


Рис.27

На $[-a; a]$: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = f(x) - f_1(x) = f(x) = x$;

на $[a; 3a]$: $f_2(x) = f_2(2a - x) = 2a - x$; $f_1(x) = x - (2a - x) = 2x - 2a$;

на $[-3a; -a]$: $f_1(x) = f_1(-x) = 2x - 2a$; $f_2(x) = x - (-2x - 2a) = 3x + 2a$;

на $[3a; 5a]$: $f_2(x) = f_2(2a - x) = 3(2a - x) + 2a = 8a - 3x$; $f_1(x) = x - (8a - 3x) = 4x - 8a$, и т.д.

5. Пусть $a_1, a_2 \ldots, a_n$ удовлетворяют условию задачи. Докажем, что существует a_{n+1} такое, что $A_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2$ делится на $B_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}$. Поскольку $A_{n+1} = A_n + (a_{n+1} - B_n)(a_{n+1} + B_n) + B_n^2$, число A_{n+1} делится на B_{n+1}, если $A_n + B_n^2$ делится на B_{n+1}. Для этого достаточно взять $a_{n+1} = A_n + B_n^2 - B_n$ (при этом $A_n + B_n^2 = B_{n+1}$). Тогда $a_{n+1} > a_n$, так как $B_n^2 - B_n > 0$, и $a_{n+1} > A_n > a_n^2 > a_n$.

6. Ответ: при четных n. Если n нечетно, то сумма длин всех $n-1$ переходов, равная $1 + 2 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$, делится на n. Но это означает, что после $n-1$ переходов мальчик оказался на том же месте, с которого начал кататься и, следовательно, на каком-то из сидений он не побывал.

При четном n мальчик может побывать на всех сиденьях при таких длинах переходов: $1, n-2, 3, n-4, \ldots, n/2, (n/2)-1, \ldots \ldots, 4, n-3, 2, n-1$.

XXIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $u = vn/(1-n) = 0{,}022$ м/с; $f = nv^2\rho h/(1-n) = 0{,}8$ Н/м.
2. $F = 2mg = 1470$ Н. *Указание*. При толчке ускорение человека равно g.
3. 1) $m_1 = 0{,}86$ кг; 2) $\Delta m/\Delta t = 0{,}068$ кг/мин; 3) $m_{в.н} = 0{,}67$ кг; 4) $m_{в.в} = 0{,}53$ кг; 5) воды не осталось.
4. Возможны два случая: а) $R_1 = 2{,}5$ Ом, $R_2 = R_3 = 5$ Ом; б) $R_1 = R_3 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом.

10 класс

2. $m_в/m_в = 3{,}5\%$. *Указание*. Процесс продавливания воды — адиабатический.
3. $T_1/T_0 = 1{,}12$. *Указание*. Потоки газа в пузырь и из пузыря должны совпадать.
4. $r = 2R/5$. *Указание*. Часть тока истекает с торцов стержней.
5. $F = BIR/2$. *Указание*. Натяжение витка обусловлено составляющей магнитной индукции, направленной по оси соленоида и равной $B/2$.

11 класс

1. $T = \pi\sqrt{\dfrac{M(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$.
2. Согласно данным первого абзаца, аппараты движутся по эллипсам (хотя и очень вытянутым) и их максимальное удаление от Солнца составляет приблизительно $1{,}2\cdot 10^{14}$ км. По данным второго абзаца, аппараты удаляются от Солнечной системы по гиперболическим траекториям, причем практически равномерно, и за миллиард лет они удалятся примерно на $1{,}1\cdot 10^{18}$ км.
3. С помощью приведенного в условии графика находим

$P \approx (450-460)$ Вт, $T_x \approx 280$ К.

4. $\mathcal{E} = \dfrac{3}{4e}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right) = 0{,}362$ В. 5. $f = \sqrt{10}$ дюймов.

II Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Задачи теоретического тура

8—9 классы

1. Утром, так как Земля движется по орбите утренней стороной вперед. 2. Верхняя и нижняя кульминации могут происходить по одну сторону или по разные стороны от точки зенита. Обсерватория может находиться в северном или южном полушариях. Поэтому возможны 4 варианта: 68°39′ с.ш.; 64°53′ с.ш.; 64°53′ ю.ш.; 68°39′ ю.ш. 3. Наиболее продолжительное полное затмение обеспечивает Харон, спутник Плутона.
4. Столь большой период обращения пули говорит о том, что орбита была почти параболической, т.е. полная энергия пули равна нулю и v_0 — почти вторая космическая скорость. Откуда получаем $M = v_0^2R/(2G) = 4{,}2\cdot 10^{21}$ кг. 5. Высота Солнца над горизонтом в полдень находится по формуле $h = 90° - \varphi + \delta$, где $\delta = 18°30'$ — склонение Солнца на данный момент. (Оценить эту величину можно различными способами, например интерполируя δ синусоидой с 21 марта, когда $\delta = 0°$, по 22 июня, когда $\delta = 23°27'$.) Таким образом, на день проведения тура — 14 мая $h = 90° - 54°37' + 18°30' = 54°$. Средний астрономический полдень наступит по Гринвичу в $12^h - \lambda(1^h/15°) \approx 9^h21^m$. Прибавив разницу во времени (летом — 4 часа), получаем по московскому времени 13^h21^m. Поправка, связанная с уравнением времени в середине мая незначительна, около $-3'40''$. С этой поправкой кульминация Солнца 14 мая в Рязани была в 13^h17^m.

10—11 классы

1. Вся поглощаемая астероидами энергия идет на излучение по закону $E \sim T^4$. Поскольку $E_2 = E_1/2$, получаем $T_2 = T_1/2^{1/4}$, или $t_2 = -128$ °С. 2. Примем яркость галактики, лишенной пыли, за единицу. Тогда при наличии тонкого слоя пыли, ослабляющего втрое, яркость составит $1/2 + (1/2)/3$. Соответствующая разность звездных величин будет равна $2{,}5\lg(1/2 + 1/6) = 0{,}44$, т.е. галактика выглядела бы ярче на 0,44 звездные величины. 3. Пусть v — орбитальная скорость звезд, а D — расстояние между ними. Тогда согласно эффекту Доплера: $v/c = (\Delta\lambda/2)/\lambda$ и из равенства центростремительного и гравитационного ускорений: $v^2/(D/2) = GM/D^2$ получаем $D = 2GM/(c\Delta\lambda/\lambda)^2 \approx 7{,}5\cdot 10^{10}$ м (около 0,5 а.е.).
5. Можно считать, что движение спутника все время происходит по круговой орбите, а сила сопротивления только уменьшает полную энергию спутника. Поскольку энергия равна $E = GM/R + mv^2/2 = -mv^2/2$, а изменение энергии за один оборот вокруг Земли составляет $-2\pi RF$, получаем, $-mv^2/2 - 2\pi RF = -m(v+\Delta v)^2/2$, откуда, учитывая, что $\Delta v \le v$ и $v = \sqrt{gR}$, находим $\Delta v = 2\pi F\sqrt{R}/(M\sqrt{g}) \approx 0{,}018$ м/с. Важно отметить, что скорость спутника увеличивается, несмотря на уменьшение полной энергии.

«Квант» улыбается

1. Их останется только девять. 2. Да у себя дома! 3. ...сказали, что четыре. 4. ...Питеру можно играть со мной? 5. ...ловил именно карасей? 6. ...он не красил волос! 7. ...Вас! 8. ...уборщица. 9. 740 рублей. 10. ...его не знаешь! 11. ...у него ладонь больше. 12. ...завести! 13. ...число волос нечетное.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.П.Бухарев, В.Н.Власов, К.И.Кобзев, С.Ф.Лухин, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ
Л.А.Панюшкина

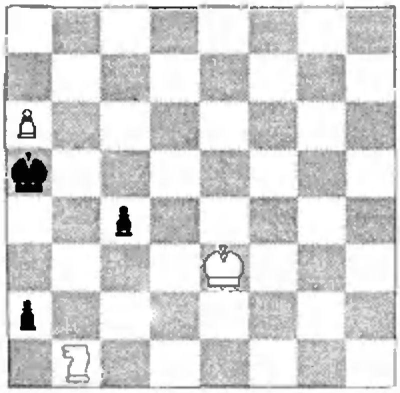
ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Е.В.Самойлова

Адрес редакции:
103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №1190.

Сказочное превращение

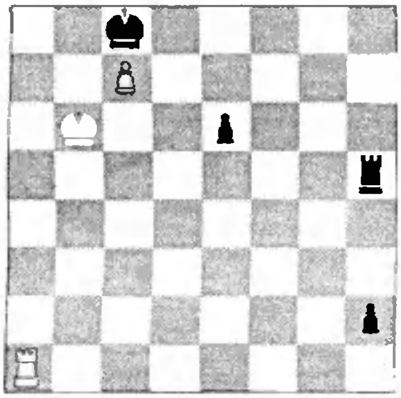
В задачах и этюдах пешка нередко превращается не в ферзя, а в какую-нибудь другую, более слабую фигуру, чем вызывает крайнее удивление у любителей шахматной композиции. Значительно реже эти «сказочные» превращения происходят на практике, и почти каждый такой случай представляет особый интерес... Взгляните на несколько занятных примеров.



Бремель — Кертис

1. a7 abФ 2. a8Л+!! Kpb4 3. Лb8+ Kpc3 4. Л:b1. Превращение в ферзя на втором ходу привело бы сейчас к пату после 4.Ф:b1. Теперь же черные благополучно сдались.

Если превращение в ладью еще встречается время от времени в партиях, то превращение в слона или коня вообще редкий турнирный гость.

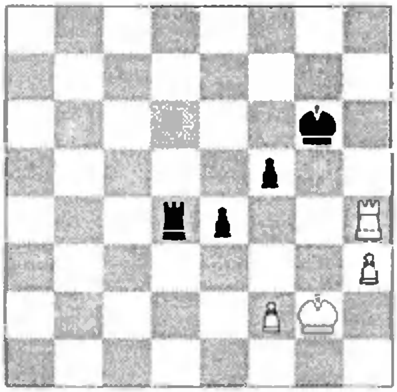


Холмов — Эльвест

В этой партии двух известных гроссмейстеров превращение **1...h1Ф** позволяло белым спастись: 2.Ла8+!Ф:а8 пат.

Эльвест же выиграл благодаря парадоксальному **1...h1C!! 2.Лf1 Лh8 3. Лf7 Лc8 4. Kpc5 e5 5. Kpd6 Cb7**, и все кончено.

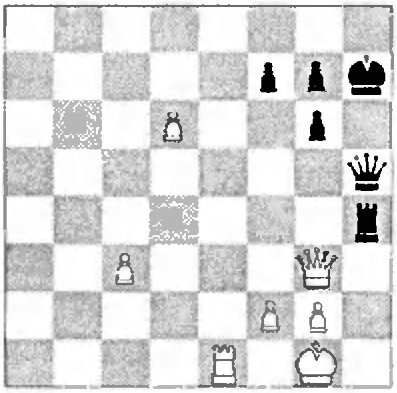
В остальных забавных примерах пешка меняется на коня...



Галич — Вукчевич

Смелым ходом **1...e3!** черные пожертвовали ладью в надежде взамен получить ферзя. **2. Л:d4.** В случае 2. f4 e2 3. Kpf2 Лe4 4. Kpe1 Лe8! белые оказывались в цугцванге.

2...e2 3. Лd6+ Kpf7 4. Лd7+ Kpf6 5. Лd6+ Kpe7. Здесь белые могли добиться ничьей после 6. Лd5! e1Ф 7. Л:f5, однако сыграли **6. Лd3** в расчете на 6...e1Ф 7. Лe3+, забыв про неожиданную вилку **6...e1K+!**

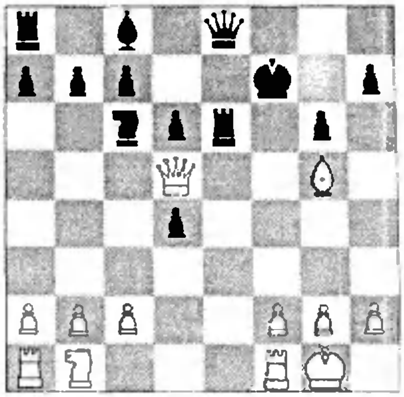


Брон — Ордель

В этом положении Брон этюдно завершил борьбу, недаром он — гроссмейстер по шахматной композиции.

1. Ф:h4!! Ф:h4 2. d7 Фd8 3. Лd1 Kpg8 4. c4 Kpf8 5. c5 Kpe7 6. c6 f5 7. Лe1+ Kpf7 8. Лc1 Фc7 9. g3! Но не 9. Лd1? Kpe7 10. Лe1+ Kpf7 11. Лe8 Фf4! 12. d8Ф Фc1+ 13. Kph2 Фf4+ с вечным шахом.

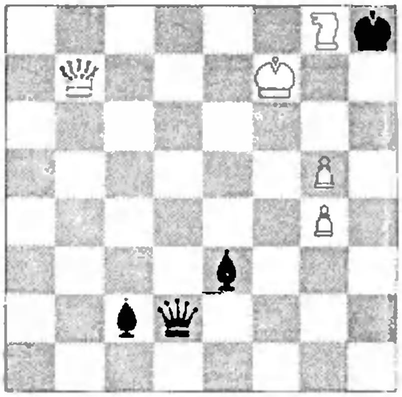
9...f4 10. Лd1 Kpe7 11. Лe1+ Kpf7 12. Лe8 Ф:c6 13. d8K! Kp:e8 14. K:c6. Черные сдались.



Шумов — Яниш

В этой партии двух знаменитых маэстро прошлого века белая пешка осуществляет так называемый эксцельсиор — форсированный марш с исходного места до поля превращения — и при этом становится слоном!

1. f4 Kpg7 2. f5 Лe5 3. f6+ Kph8 4. f7 Kpg7 5. feK+! с матом в два хода: **5...Л:e8 6. Фf7+ Kph8 7. Cf6×.**



Рихтер — Лойтер

И в этой позиции белые выиграли этюдным путем: **1. Фh1+ Ch7 2. Ф:h7+! Kp:h7 3. g6+ Kph8 4. g7+ Kph7 5. Kf6+ Kph6 6. g5+! C:g5.** В случае 6...Kp:g5 решало простое 7. Ke4+ Kpf5 8. K:d2 C:d2 9. g8Ф. Ну а теперь следует знакомое **7. g8K×!**

И в заключение любопытная партия, которая завершилась матом превращенным конем.

Рунау — Шмидт.

1. e4 Kc6 2. d4 d5 3. ed Ф:d5 4. Kf3 Cg4 5. Ce2 0-0-0 6. c4 Фh5 7. d5 C:f3 8. C:f3 Фe5+ 9. Ce3 Ф:b2 10. 0-0 Ф:a1 11. dc Л:d1 12. cb Kph8 13. Л:d1 c6 14. C:c6 Kpc7 15. Лd7+ Kp:c6 16. b8K×!

Е.Гик

Индекс 70465

Уважаемые читатели журнала

КВАНТ,

Мы надеемся, что те из вас, кто получал нашу книжно-журнальную продукцию регулярно, уже позаботился о продолжении наших отношений на следующий срок — ведь очередная подписная кампания в полном разгаре.

Для тех же, кто только собирается стать нашим постоянным читателем, сообщаем, что именно сейчас пришло время сделать первый шаг и подписаться на журнал «Квант» на I полугодие 1996 года. По уже успевшей сложиться традиции мы продолжим выпуск наряду с журналами и книг-приложений — это будут самостоятельные тематические (отдельно по физике и математике) издания на основе лучших материалов журнала прошлых лет.

В качестве приятного сюрприза хотим также отметить, что подписная цена останется неизменной, — что должно благоприятно сказаться на пополнении нашей аудитории.

Наш подписной индекс 70465 в каталоге Роспечать.

Как и раньше в помещении редакции открыт киоск нашей новой и старой продукции. Здесь вы можете приобрести как новые выпуски, так и изданные ранее и уже ставшие библиографической редкостью.

Звоните и приходите!
Мы Вас ждем!

Бюро Квантум